1. (a) Amb $\vec{r}(t) = (t^2 + 8, t^3 - 2)$ i $t_1 = 2\,s$, $t_2 = 4\,s$, calculem el vector posició per cada temps

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(2) = (12, 6)$$

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(4) = (24, 62)$$

Ara és immediat trobar el vector desplaçament

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}(4) - \vec{r}(2) = (24, 62) - (12, 6) = (12, 56)$$

(b) Calculem directament

$$|\Delta\vec{r}| = |(12, 56)| = \sqrt{12^2 + 56^2} = \sqrt{3280} = 57,27\,m$$

(c) Aplicant la definició de velocitat mitjana

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(12, 56)}{4 - 2} = \frac{(12, 56)}{2} = (6, 28)$$

En quant al mòdul

$$|\vec{v}_m| = |(6, 28)| = \sqrt{6^2 + 28^2} = \sqrt{820} = 28,64\,m/s$$

(d) Derivant el vector posició respecte el temps

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (2t, 3t^2)$$

(e) Calculem la velocitat pels instants de temps considerats

$$\vec{v}(t_2) = \vec{v}(1) = (4, 12)$$

$$\vec{v}(t_4) = \vec{v}(3) = (8, 48)$$

ara, aplicant la definició d'acceleració mitjana

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(8, 48) - (4, 12)}{4 - 2} = \frac{(4, 36)}{2} = (2, 18)$$

En quant al mòdul

$$|\vec{a}_m| = |(2, 18)| = \sqrt{2^2 + 18^2} = \sqrt{328} = 18,11\,m/s^2$$

(f) Derivant el vector velocitat respecte el temps

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (2, 6t)$$

2. L'objectiu de l'exercici és establir la igualtat

$$|\vec{a}(t)|^2 = |\vec{a}_t(t)|^2 + |\vec{a}_n(t)|^2$$

Comencem calculant el vector velocitat a partir del vector posició

$$\vec{r}(t) = \big(t^3 - 1, t^2 + 1\big)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \big(3t^2, 2t\big)$$

i el seu mòdul

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\left(3t^2\right)^2 + \left(2t\right)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

Calculem ara el vector acceleració (total)

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (6t, 2)$$

i el seu mòdul

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{\left(6t\right)^2 + 2^2} = \sqrt{36t^2 + 4}$$

Ara, el mòdul de l'acceleració centrípeta

$$|\vec{a}_n(t)| = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{R} = \frac{\left(\sqrt{9t^4 + 4t^2}\right)^2}{R} = \frac{9t^4 + 4t^2}{R}$$

Finalment el mòdul de l'acceleració tangencial

$$|\vec{a}_t(t)| = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \frac{36t^3 + 8t}{2\sqrt{9t^4 + 4t^2}}$$

De forma que la relació implícita demanada entre el radi de curvatura de la trajectòria i el temps serà

$$\left(\sqrt{36t^2 + 4}\right)^2 = \left(\frac{36t^3 + 8t}{2\sqrt{9t^4 + 4t^2}}\right)^2 + \left(\frac{9t^4 + 4t^2}{R}\right)^2$$

que podem escriure com

$$36t^2 + 4 = \frac{\left(36t^3 + 8t\right)^2}{4(9t^4 + 4t^2)} + \frac{\left(9t^4 + 4t^2\right)^2}{R^2}$$