1. (a) Amb $\vec{r}(t) = (t^3 - 1, t^2 + 1)$ i $t_1 = 2\,s$, $t_2 = 4\,s$, calculem el vector posició per cada temps

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(2) = (7, 5)$$

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(4) = (63, 17)$$

Ara és immediat trobar el vector desplaçament

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}(4) - \vec{r}(2) = (63, 17) - (7, 5) = (56, 12)$$

(b) Calculem directament

$$|\Delta\vec{r}| = |(56, 12)| = \sqrt{56^2 + 12^2} = \sqrt{3280} = 57,27\,m$$

(c) Aplicant la definició de velocitat mitjana

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(56, 12)}{4 - 2} = \frac{(56, 12)}{2} = (28, 6)$$

En quant al mòdul

$$|\vec{v}_m| = |(28, 6)| = \sqrt{28^2 + 6^2} = \sqrt{820} = 28,64\,m/s$$

(d) Derivant el vector posició respecte el temps

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (3t^2, 2t)$$

(e) Calculem la velocitat pels instants de temps considerats

$$\vec{v}(t_2) = \vec{v}(1) = (12, 4)$$

$$\vec{v}(t_4) = \vec{v}(3) = (48, 8)$$

ara, aplicant la definició d'acceleració mitjana

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(48, 8) - (12, 4)}{4 - 2} = \frac{(36, 4)}{2} = (18, 2)$$

En quant al mòdul

$$|\vec{a}_m| = |(18, 2)| = \sqrt{18^2, 2^2} = \sqrt{328} = 18,11\,m/s^2$$

(f) Derivant el vector velocitat respecte el temps

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (6t, 2)$$

2. L'objectiu de l'exercici és establir la igualtat

$$|\vec{a}(t)|^2 = |\vec{a}_t(t)|^2 + |\vec{a}_n(t)|^2$$

Comencem calculant el vector velocitat a partir del vector posició

$$\vec{r}(t) = \big(t^2 + t + 3, t^3 - 8\big)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \big(2t + 1, 3t^2\big)$$

i el seu mòdul

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(2t+1)^2 + (3t^2)^2}$$

Calculem ara el vector acceleració (total)

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (2, 6t)$$

i el seu mòdul

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{2^2 + (6t)^2} = \sqrt{4 + 36t^2}$$

Ara, el mòdul de l'acceleració centrípeta

$$|\vec{a}_n(t)| = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{R} = \frac{\left(\sqrt{(2t+1)^2 + (3t^2)^2}\right)^2}{R} = \frac{(2t+1)^2 + (3t^2)^2}{R}$$

Finalment el mòdul de l'acceleració tangencial

$$|\vec{a}_t(t)| = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \frac{2(2t+1)\cdot\cancel{2} + \cancel{2}(3t^2)\cdot 6t}{\cancel{2}\sqrt{(2t+1)^2 + (3t)^2}}$$

De forma que la relació implícita demanada entre el radi de curvatura de la trajectòria i el temps serà

$$\left(\sqrt{4 + 36t^2}\right)^2 = \left(\frac{2(2t+1) + 18t^3}{\sqrt{(2t+1)^2 + (3t)^2}}\right)^2 + \left(\frac{(2t+1)^2 + (3t)^2}{R}\right)^2$$

que podem escriure com

$$4 + 36t^2 = \frac{\big(2(2t+1) + 18t^3\big)^2}{(2t+1)^2 + (3t)^2} + \frac{\big((2t+1)^2 + (3t)^2\big)^2}{R^2}$$