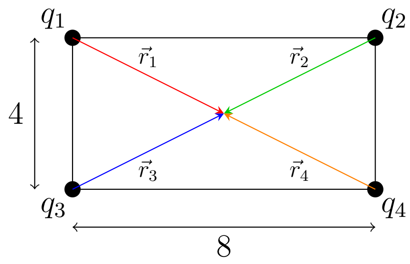
**1.** (a) En aquesta resolució prenem un sistema de coordenades amb l'origen ($O$) situat al punt on es troba $q_3$.




D'aquesta manera, les càrregues queden situades en els punts

$$q_1 \rightarrow P_1 = (0, 4)$$

$$q_2 \rightarrow P_2 = (8, 4)$$

$$q_3 \rightarrow P_3 = (0, 0)$$

$$q_4 \rightarrow P_4 = (8, 0)$$

i el centre del quadrat (el podem anomenar $C$), té coordenades $C = (4, 2)$, de forma que els vectors que van de cada càrrega a ell són

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1C} = (4, -2)$$

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{P_2C} = (-4, -2)$$

$$\vec{r}_3 = \overrightarrow{P_3C} = (4, 2)$$

$$\vec{r}_4 = \overrightarrow{P_4C} = (-4, 2)$$

Noteu que les components d'aquests vectors no depenen de la tria feta per la posició de l'origen de coordenades. Els seus mòduls valen

$$|\vec{r}_1| = r_1 = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$|\vec{r}_2| = r_2 = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$|\vec{r}_3| = r_3 = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$|\vec{r}_4| = r_4 = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

Ara, el camp elèctric que crea cada càrrega al centre del rectangle serà

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^3}\vec{r_1} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{3\cdot 10^{-9}}{\left(\sqrt{20}\right)^3}\cdot(4,-2)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^3}\vec{r_2} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{-4\cdot 10^{-9}}{\left(\sqrt{20}\right)^3}\cdot(-4,-2)$$

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_3^3}\vec{r_3} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{7\cdot 10^{-9}}{\left(\sqrt{20}\right)^3}\cdot(4,2)$$

$$\vec{E}_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4}{r_4^3}\vec{r_4} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{-12\cdot 10^{-9}}{\left(\sqrt{20}\right)^3}\cdot(-4,2)$$

i la seva suma,

$$\begin{aligned}\vec{E}_{total} =& \frac{1}{\left(\sqrt{20}\right)^3}\Big[27\cdot(4,-2) - 36\cdot(-4,-2) + 63\cdot(4,2) - 108\cdot(-4,2)\Big]\\ =&(10.465,-0.805)\,N/C\end{aligned}$$

(b) El potencial que crea cada càrrega al centre $C$ és

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{3\cdot 10^{-9}}{\sqrt{20}}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{-4\cdot 10^{-9}}{\sqrt{20}}$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3}{r_3} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{7\cdot 10^{-9}}{\sqrt{20}}$$

$$V_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3}{r_3} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{-12\cdot 10^{-9}}{\sqrt{20}}$$

i el potencial total serà

$$V_D = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{\sqrt{20}}\Big[27 - 36 + 63 - 108\Big] = -12{,}075\,V$$

(c) Per calcular aquest treball necessitem saber el potencial que crea cada càrrega al punt mig (li podem dir $M$) del costat que conté $q_2$ i $q_4$, i per això necessitem els vectors

$$\vec{r'}_1 = \overrightarrow{P_1M} = (8,-2)$$

$$\vec{r'}_2 = \overrightarrow{P_2M} = (0,-2)$$

$$\vec{r'}_3 = \overrightarrow{P_3M} = (8,2)$$
$$\vec{r'}_3 = \overrightarrow{P_4M} = (0,2)$$

amb mòduls

$$|\vec{r'}_1| = r_1 = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = \sqrt{68}$$
$$|\vec{r'}_2| = r_2 = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$$
$$|\vec{r'}_3| = r_3 = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}$$
$$|\vec{r'}_4| = r_4 = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

d'aquesta manera, els potencials seran

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r'_1} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{3\cdot 10^{-9}}{\sqrt{68}}$$
$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r'_2} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{-4\cdot 10^{-9}}{2}$$
$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3}{r'_3} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{7\cdot 10^{-9}}{\sqrt{68}}$$
$$V_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_4}{r_4} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{-12\cdot 10^{-9}}{2}$$

i el potencial total al punt $M$ val

$$V_M = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{27}{\sqrt{68}} - 18 + \frac{63}{\sqrt{68}} - 54 = -61,086\, V$$

Finalment podem calcular el treball demanat com

$$W_{C\to M} = Q(V_M - V_C) = 5\cdot 10^{-9}\cdot(-61,086 - (-12,075) = -2,45\cdot 10^{-7}\, J$$

com que aquest resultat és negatiu veiem que en realitat el treball el fa el camp elèctric.

**2.** Calculem el treball que cal fer per portar cada càrrega des de l'infinit fins al punt de destinació de cadascuna.

Per la primera càrrega aquest treball val

$$W_1 = W_{\infty \to P_1} = q_1(V_{P_1} - V_\infty) = 3 \cdot 10^{-9} \cdot (0 - 0) = 0\, J$$

ja que abans que $q_1$ arribi al seu punt de destí, no hi ha cap altre càrrega present i per tant, el potencial electroestàtic al punt $P_1$ val zero. Recordem que $V_\infty = 0$ per definició.

En quant a la segona càrrega, quan aquesta arribi a $P_2$, sí sentirà els efectes del potencial que crea $q_1$ en aquest punt, perquè $q_1$ ja està al seu lloc quan $q_2$ arriba a $P_2$. Llavors

$$W_2 = W_{\infty \to P_2} = q_2(V_{P_2} - V_\infty)$$

Necessitem doncs calcular el potencial que crea $q_1$ en $P_2$, que anomenarem $V_{P_2}^{q_1}$.

Comencem calculant $\overrightarrow{P_1P_2} = (-4, 0)$, amb mòdul $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{-(4)^2 + 0^2} = 4$, aleshores

$$V_{P_2}^{q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{4} = \frac{27}{4}\, V$$

i

$$W_2 = -4 \cdot 10^{-9} \left( \frac{27}{4} - 0 \right) = -2,7 \cdot 10^{-8}\, J$$

Ara hem de portar $q_3$ fins a la seva destinació. Per calcular el treball que cal per fer-ho, hem de calcular el potencial electroestàtic present en $P_3$ i creat ara tant per $q_1$ com per $q_2$.

Necessitem els vectors $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 4)$ i $\overrightarrow{P_2P_3} = (2, 4)$, amb mòduls $|\overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{20}$ i $|\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{20}$. Amb la mateixa notació que abans tenim

$$W_3 = W_{\infty \to P_3} = q_3(V_{P_3} - V_\infty)$$

a banda, ara $V_{P_3}$ té dues contribucions, tal com hem dit abans, i és

$$V_{P_3} = V_{P_3}^{q_1} + V_{P_3}^{q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_3}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{20}} - 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{20}}$$

$$V_{P_3} = -2,012\, V$$

finalment

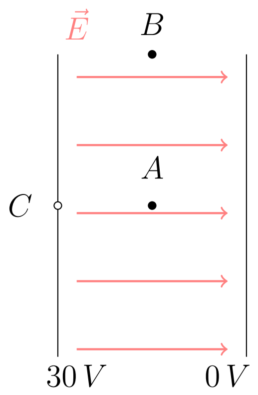
$$W_3 = W_{\infty \to P_3} = q_3(V_{P_3} - V_\infty) = 7 \cdot 10^{-9} \cdot (-2,012 - 0) = -1,409 \cdot 10^{-8}\, J$$

El treball total doncs serà

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 = 0 - 2,7 \cdot 10^{-8} - 1,409 \cdot 10^{-8} = -4,109 \cdot 10^{-8}\, J$$

i correspon a l'energia de configuració del sistema de càrregues.

**3.** A partir de l'enunciat




(a) El sentit del camp elèctric és l'indicat, ja que sempre va dirigit cap on el potencial electroestàtic disminueix.
(b) Fent servir

$$E \cdot d = V \to E = \frac{V}{d} = \frac{100}{10 \cdot 10^{-3}} = 10\,000\, N/C$$

(c) Al punt $A$ el potencial val exactament el valor mig dels extrems, és a dir

$$\frac{100+0}{2} = 50\, V$$

(d) El camp elèctric val el mateix en tots els punts interiors del condensador, (es tracta d'un camp uniforme). D'aquesta manera, la relació

$$E = \frac{V}{d}$$

es compleix.
(e) Un electró que entri pel punt $B$ patirà una desviació en la seva trajectòria de forma que de rectilínia passarà a parabòlica, ja que hi ha una força (que provocarà una acceleració) en la direcció horitzontal. Sabem que les càrregues negatives es mouen en sentit contrari al del camp elèctric (de forma que la seva energia potencial disminueixi), per tant, es desvia cap a l'esquerra.
(f) El protó es mourà cap a la dreta, ja que les càrregues positives es mouen en el sentit del camp elèctric, de forma que la seva energia potencial disminueixi. El seu moviment serà rectilini amb acceleració uniforme.