1. (a) Per l'energia cinètica tenim

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 750 \cdot (400)^2 = 6 \cdot 10^7 \, J$$

per la potencial gravitatòria

$$\begin{aligned} E_{pg} &= -\frac{GM_\oplus m}{r} = -\frac{g_0 R_\oplus^2 m}{10R_\oplus + R_\oplus} = -\frac{g_0 R_\oplus^{\cancel{2}} m}{11\cancel{R_\oplus}} \\ &= -\frac{g_0 R_\oplus m}{11} = -\frac{9,8 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \cdot 750}{11} = -4,26 \cdot 10^9 \, J \end{aligned}$$

on hem fet servir la definició de g_0,

$$g_0 = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}$$

i finalment, per la mecànica

$$E_M = E_c + E_{pg} = 6 \cdot 10^7 - 4,26 \cdot 10^9 = -4,2 \cdot 10^9 \, J$$

(b) Com que és $E_M < 0$ podem concloure que es troben lligats per la interacció gravitatòria.

(c) Fem un balanç d'energia

$$-4,2 \cdot 10^9 = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{GM_\oplus m}{R_\oplus}$$

d'on

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{2}{m}\left(-4,2 \cdot 10^9 + \frac{GM_\oplus m}{R_\oplus}\right)} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(-4,2 \cdot 10^9 + \frac{g_0 R_\oplus^{\cancel{2}} m}{\cancel{R_\oplus}}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{750}\left(-4,2 \cdot 10^9 + 9,81 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \cdot 750\right)} = 10667 \, m/s \end{aligned}$$

2. (a) La velocitat de les òrbites circulars estables es calcula com

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 R_\oplus^2}{8R_\oplus + R_\oplus}} \\ &= \sqrt{\frac{g_0 R_\oplus^{\cancel{2}}}{9\cancel{R_\oplus}}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 6,37 \cdot 10^6}{9}} = 2,635 \cdot 10^3 \, m/s \end{aligned}$$

(b) La velocitat d'escapament des d'una altura h sobre la superfície de la Terra es calcula com

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus + h}} = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus + 8R_\oplus}} = \sqrt{\frac{2g_0 R_\oplus^{\cancel{2}}}{9\cancel{R_\oplus}}}$$
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 6,37 \cdot 10^6}{9}} = 3,726 \cdot 10^3 \, m/s$$

3. (a) El treball demanat es pot calcular com la diferència d'energia mecànica del satèl·lit al canviar d'òrbita. Així

$$W_{h\to h'} = -\frac{1}{2}G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus + h'} - \left(-\frac{1}{2}G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus + h}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus + 4R_\oplus} - \left(-\frac{1}{2}G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus + 3R_\oplus}\right)$$

$$= \frac{1}{2}GM_\oplus m\left(\frac{1}{4R_\oplus} - \frac{1}{5R_\oplus}\right) = \frac{1}{2}g_0 R_\oplus^2 \cdot \frac{5R_\oplus - 4R_\oplus}{4R_\oplus \cdot 5R_\oplus}$$

$$= \frac{1}{2}g_0 \cancel{R_\oplus^2} m \cdot \frac{R_\oplus}{20\cancel{R_\oplus^2}}$$

$$= \frac{1}{40} \cdot 9,81 \cdot 75 \cdot 6,37 \cdot 10^6 = 1,17 \cdot 10^8 \, J$$

4. Apliquem la tercera llei de Kepler a Tritó i a Nereida tenint en compte que el centre de forces és Neptú ($\neptune$)

$$T_{Tr}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\neptune}} r_{\neptune-Tr}^3$$

$$T_{Ne}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\neptune}} r_{\neptune-Ne}^3$$

Dividint les equacions

$$\frac{T_{Tr}^2}{T_{Ne}^2} = \frac{\cancel{\frac{4\pi^2}{GM_{\neptune}}} r_{\neptune-Tr}^3}{\cancel{\frac{4\pi^2}{GM_{\neptune}}} r_{\neptune-Ne}^3}$$

d'on

$$T_{Tr}^2 = T_{Ne}^2 \cdot \frac{r_{\neptune-Tr}^3}{r_{\neptune-Ne}^3} = (360,11)^2 \cdot \frac{354759^3}{5513400^3} = 34,547$$

i finalment

$$T_{Tr} = \sqrt{34,547} = 5,878\, dies$$

5. (a) A partir de la tercera llei de Kepler, aplicada al centre galàctic com a centre de forces i el Sol,

$$T_{\odot}^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

calculem directament

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT_{\odot}^2} = \frac{4\pi^2 \cdot \left(2,4 \cdot 10^{20}\right)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(203 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\right)^2} = 2 \cdot 10^{41}\, kg$$

(b) Com que hem suposat que la trajectòria del Sol és circular es pot fer servir

$$2\pi r = vT$$

d'on

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 2,4 \cdot 10^{20}}{203 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} = 2,36 \cdot 10^5\, m/s$$