

FÍSICA 1R BATXILLERAT

Artur Arroyo i Pascual[§]

<https://artur-sjo.github.io/index.html>

Col·legi Sant Josep Obrer

C. Covadonga, s/n 08906 L'Hospitalet del Llobregat

Darrera revisió 18/10/2026

Resum

Aquest curs representa una ampliació dels continguts vistos al llarg de l'ESO, possiblement en assignatures diferents. L'objectiu és tenir una bona fonamentació dels temes relacionats amb la cinemàtica, la dinàmica, el treball i energia i termodinàmica bàsica.

[§] aarroyo+batx@stjosep.org

Índex

1	La mesura	4
1.1	Magnituds i unitats	4
1.2	Anàlisi dimensional	5
1.3	El problema de la mesura	6
1.3.1	Incertesa en els resultats	7
1.3.2	Significat de la mitjana i la desviació estàndard	9
1.3.3	Arrodoniment	9
1.3.4	Propagació de la incertesa en fer operacions	10
2	El moviment	12
2.1	Introducció	12
2.2	La posició	12
2.3	El vector posició	12
2.4	El vector desplaçament	13
2.5	La velocitat	14
2.5.1	La velocitat mitjana	14
2.5.2	La velocitat instantània	14
2.5.3	La velocitat i el sistema de referència	16
2.6	L'acceleració	17
2.6.1	L'acceleració mitjana	17
2.6.2	L'acceleració instantània	18
3	Cinemàtica del punt	19
3.1	Moviment rectilini	19
3.1.1	Casos amb un sol mòbil	19
3.1.2	Casos amb dos mòbils	26
3.2	Moviment de projectils	32
3.2.1	Moviment vertical	32
3.2.2	Tir parabòlic	37
3.3	Moviment circular	46
4	Dinàmica del punt	51
4.1	Lleis de Newton	51
4.2	Forces fictícies	53
4.3	La tensió	56
4.4	Diferència entre massa i pes	56
4.5	La força normal	57
4.6	Forces de fregament	59
4.7	Cossos enllaçats	63

4.8	El pla inclinat	67
4.9	Dinàmica del moviment circular	70
4.10	La corba peraltada	77
5	Treball i energia	80
5.1	Definició de treball	80
5.1.1	Forces conservatives	80
5.1.2	Forces no conservatives	80
5.2	Energia cinètica i potencial	81
5.3	Teorema (de les forces vives)	81
5.4	Potència	84
5.5	El moment lineal. Xocs	88
5.5.1	Coefficient de restitució	90
5.5.2	El pèndol balístic	91
5.6	Força elàstica i energia	94

1 La mesura

1.1 Magnituds i unitats

A física és fonamental distingir entre magnitud i unitat. Per exemple, la longitud és una magnitud, que es pot mesurar en diferents unitats: metre, centímetres, milles nàutiques, etc. També cal distingir entre magnituds escalars i vectorials. Les primeres es poden descriure amb un nombre i una unitat, per exemple la temperatura. Per les segones, al tractar-se de vectors, necessitem donar, a part del valor numèric, la direcció, sentit i possiblement punt d'aplicació. Per exemple, la velocitat d'un cotxe és una magnitud vectorial.

Les magnituds fonamentals són:

- longitud **L**
- temps **T**
- massa **M**
- intensitat de corrent **I**

Per representar aquestes magnituds farem servir el *sistema internacional* d'unitats també anomenat *SI* o *MKS*. En aquest sistema, la unitat de longitud és el metre (*m*), la unitat de temps és el segon (*s*), la unitat de massa és el kilogram (*kg*) i la unitat de intensitat de corrent és l'Ampere (*A*). És evident que només amb aquestes magnituds, (longitud, temps, massa, intensitat de corrent), no podrem fer gaire cosa, és per això que tenim les anomenades *magnituds derivades* que són, juntament amb la unitat corresponent del *SI*:

- | | |
|----------------------------------|---|
| • Freqüència, Hertz (Hz) | • Potencial elèctric, Volt (V) |
| • Força, Newton (N) | • Capacitat elèctrica, Farad (F) |
| • Energia, Joule (J) | • Resistència elèctrica, Ohm (Ω) |
| • Potència, Watt (W) | • Flux magnètic, Weber (Wb) |
| • Pressió, Pascal (Pa) | • Densitat de flux magnètic, Tesla (T) |
| • Càrrega elèctrica, Coulomb (C) | • Inductància, Henry (H) |

Com veiem, moltes magnituds derivades tenen nom propi, per exemple el *Newton* que correspon a la següent combinació d'unitats

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$$

Tot i això, hi ha altres unitats que, malgrat no ser del sistema internacional convé conèixer:

- Ångstrom, $1 \text{ Å} = 10^{-10} m$
- any llum, $1 ly = 0,3066 pc$
- Fermi, $1 fm = 10^{-15} m$
- electronvolt, $1 eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J$
- barn, $1 barn = 10^{-28} m^2$
- Unitat astronòmica, $1 UA = 1,5 \cdot 10^{11} m$
- parsec, $1 pc = 3 \cdot 10^{16} m$

1.2 Anàlisi dimensional

En aquest context la paraula dimensió no té res a veure amb l'accepció habitual de dimensió d'un cert objecte matemàtic (per exemple dimensió d'un espai vectorial). Per dimensió, entendrem “com estan relacionades entre sí les magnituds fonamentals i quan parlem d'anàlisi dimensional ens referim a que en qualsevol expressió o fórmula que tinguem, les dimensions a banda i banda de l'equació han de ser les mateixes. Per exemple; com la velocitat es calcula fent espai dividit entre temps, dimensionalment escriurem:

$$[v] = \frac{L}{T}$$

de forma que l'expressió

$$v = et$$

no pot ser una fórmula correcta a física, donat que les dimensions a banda i banda de l'equació no són les mateixes (es comprova). L'anàlisi dimensional pot ser molt útil per recordar fórmules, o fins i tot per deduir-ne d'altres.

Exercici

Trobeu, mitjançant l'anàlisi dimensional, la fórmula que relaciona el període d'un pèndol simple (temps), amb la seva longitud i l'acceleració de la gravetat en el lloc ($g = 9,8 \frac{m}{s^2}$).

1.3 El problema de la mesura

En prendre la mesura d'algun observable hem de tenir en compte dos aspectes: la fiabilitat i l'exactitud.

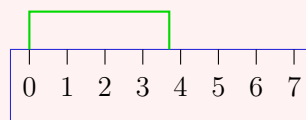
- La **fiabilitat** representa el fet que, mesurant en les mateixes condicions obtenim resultats semblants (no necessàriament propers amb el valor exacte del valor que mesurem).
- L'**exactitud** indica la proximitat dels resultats obtinguts al mesurar al valor real de la mesura.

Hi ha molts factors que influeixen en el valor que obtenim al mesurar una determinada quantitat, són factors aleatoris i incontrolables que afecten la mesura (encara que l'experiment i els aparells estiguin molt ben dissenyats). La forma de reduir aquesta influència és repetint la mesura tantes vegades com es pugui i fer servir mètodes estadístics per donar el resultat. D'aquesta manera, el resultat d'una mesura s'expressa com un **valor més probable** i una **incertesa**. Si només podem fer una mesura, com a valor per la incertesa prendrem la **sensibilitat** (s) de l'aparell

$$s = \frac{\text{divisió més petita de l'instrument}}{2}$$

Exemple 1

Hem mesurat la longitud L , d'un objecte amb un regle graduat en cm , tal com es veu a la figura. Quin és el valor que hem de donar per aquesta mesura?



El regle està graduat en cm i a ull nu només podem dir si la longitud de l'objecte que es vol mesurar està més a prop d'una xifra o una altra. Aquesta és la idea de definir la sensibilitat tal com s'ha fet abans. En l'exemple tenim

$$s = \frac{1\text{ cm}}{2} = 0.5\text{ cm}$$

llavors, com veiem que l'extrem de l'objecte és més a prop del 4 que del 3, donarem el resultat de la mesura com

$$L = 4 \pm 0.5\text{ cm}$$

1.3.1 Incertesa en els resultats

Tal com hem dit abans, la manera d'obtenir el valor més acurat d'una quantitat q , és fer tantes mesures $(q_1, q_2, \dots, q_N)$ com es pugui. Amb aquestes dades i després d'un tractament estadístic adequat prendrem com a valor de la mesura

$$q = \bar{q} \pm \sigma$$

on $\bar{q}$ és la mitjana aritmètica de les mesures obtingudes

$$\bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{N}$$

i N és el nombre total de dades. El símbol σ representa la **desviació estàndard** del conjunt obtingut de mesures i es calcula com

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (q_i - \bar{q})^2}{N}}$$

o alternativament

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N q_i^2}{N} - \bar{q}^2}$$

Exemple 2

En un experiment, mesurem cinc vegades amb una balança digital la massa d'un objecte i obtenim: $m_1 = 2,25 \text{ kg}$; $m_2 = 2,27 \text{ kg}$; $m_3 = 2,33 \text{ kg}$; $m_4 = 2,28 \text{ kg}$; $m_5 = 2,35 \text{ kg}$. Calculeu el millor valor de la mesura.

Hem de calcular la mitjana aritmètica $\bar{m}$ i la desviació estàndard σ .

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{N} = \frac{2,25 + 2,27 + 2,33 + 2,28 + 2,35}{5} = 2,296$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2,25^2 + 2,27^2 + 2,33^2 + 2,28^2 + 2,35^2}{5} - 2,296^2} = 0,0377$$

Lavors donarem com a resultat per la massa d'aquest objecte

$$m = 2,296 \pm 0,0377 \approx 2,30 \pm 0,04 \text{ kg}$$

Noteu que σ es dona amb el mateix nombre de decimals que $\bar{q}$, no el de xifres significatives (veure 1.3.4).

Alternativament, podem construir una taula per fer servir l'altra versió de la desviació estàndard. A partir del càlcul de la mitja aritmètica $\bar{m} = 2,296$

m_i	$m_i - \bar{m}$	$(m_i - \bar{m})^2$
2,25	$2,25 - 2,296 = -0,046$	0,002116
2,27	$2,27 - 2,296 = -0,026$	0,000676
2,33	$2,33 - 2,296 = 0,034$	0,001156
2,28	$2,28 - 2,296 = -0,016$	0,000256
2,35	$2,35 - 2,296 = 0,054$	0,002916
Σ	0	0,00712

Observeu que la columna de les desviacions suma zero, això és teòric i sempre ha de ser així. És una propietat útil que permet veure si els càlculs intermedis de la desviació estàndard tenen alguna errada. La suma de la darrera columna s'ha de dividir ara pel nombre de dades

$$\frac{0,00712}{5} = 0,001424$$

i fer l'arrel quadrada per trobar

$$\sigma = \sqrt{0,001424} = 0,0377$$

Exemple 3

En una mostra de 50 progenitors d'entre 30 i 40 anys d'edat, s'ha trobat que no tenen cap fill, 10; en tenen un, 15; en tenen dos, 18; en tenen tres, 6 i en tenen quatre, 1. Calculeu la mitjana aritmètica i desviació estàndard de la mostra.

Per la mitjana aritmètica fem

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^N n_i}{N} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 1}{50} = 1,46$$

Per la desviació estàndard construïm una taula tenint en compte les freqüències de cada resultat per no haver de representar la taula completa amb 50 files.



n_i	f_i	$n_i - \bar{n}$	$(n_i - \bar{n})^2$
0	10	$0 - 1,46 = -1,46$	2,1316
1	15	$1 - 1,46 = -0,46$	0,2116
2	18	$2 - 1,46 = 0,54$	0,2916
3	6	$3 - 1,46 = 1,54$	2,3716
4	1	$4 - 1,46 = 2,54$	6,4516
Σ	50	0	50,42

Llavors

$$\sigma = \sqrt{\frac{50,42}{50}} = 1,00419$$

De forma que tenim

$$n = \bar{n} \pm \sigma = 1,46 \pm 1,00419 \approx 1 \pm 1$$

Recordem que a una desviació estàndard tenim només un 68% de les dades.

1.3.2 Significat de la mitjana i la desviació estàndard

La mitja aritmètica és una mesura de tendència central dels valors d'una mostra. la desviació estàndard és en canvi una mesura de dispersió i la informació que ens proporciona és que donada una mostra, el 68% de les dades es trobaran a una σ . Si volem més precisió, hem de prendre 2σ , llavors tindrem el 95% de les dades i si prenem 3σ tindrem el 99,7%.

1.3.3 Arrodoniment

Quan volgum arrodonir un nombre decimal prendrem el següent criteri:

- Si la xifra a partir de la qual volem arrodonir és més gran que 5 augmentarem el valor de la xifra de la seva esquerra en 1. Per exemple, per arrodonir 3,1417 a 3 xifres decimals farem

$$3,1417 \approx 3,142$$

- Si la xifra a partir de la qual volem arrodonir és més petita que 5 deixarem inalterada la xifra de la seva esquerra. Per exemple, per arrodonir 3,1414 a 3 xifres decimals farem

$$3,1414 \approx 3,141$$

- Si la xifra a partir de la qual volem arrodonir és igual a 5 llavors hem de tenir en compte la paritat de la xifra de la seva esquerra, si es tracta d'una xifra parella, la deixarem inalterada, si és senar, l'augmentarem en 1. Per exemple, per arrodonir 3,1415 a 3 xifres decimals farem

$$3,1415 \approx 3,142$$

I per arrodonir 3,1485 a 3 xifres decimals farem

$$3,1485 \approx 3,148$$

1.3.4 Propagació de la incertesa en fer operacions

Al fer operacions amb nombres que en principi no són exactes s'ha de tenir en compte que aquesta incertesa es propaga als resultats i per tant, cal donar el nombre correcte de xifres significatives al final dels càlculs.

Al multiplicar o dividir, el resultat no pot tenir més xifres significatives que cap dels nombres presents en l'operació. Per exemple, no és el mateix partir d'un valor d'un temps mesurat $t_1 = 3,12 \text{ s}$ que $t_2 = 3,12000 \text{ s}$. El primer valor té tres *xifres significatives* mentre que el segon en té sis. Si hem de calcular t^3 , el resultat en ambdós casos és $t^3 = 30,371328$ resultat que sembla molt precís tot i que no té perquè ser-ho si el nombre de xifres significatives original era petit. Haurem d'escriure $t_1^3 = 30,4$ i $t_2^3 = 30,3713$, arrodonint en cada cas si cal.

Al sumar o restar, el resultat no pot tenir més decimals que cap dels nombres que participi en l'operació. Per exemple, per l'operació

$$17,2 + 8,246 + 79$$

escriurem

$$17,2 + 8,246 + 79 \approx 104$$

A l'hora de fer càlculs complexos amb la calculadora convé fer el càlcul d'un sol cop i després, arrodonir. En el seu defecte, cal conservar totes les xifres que apareixen a la pantalla i arrodonir només al final.

Exercicis

1. Feu els següents càlculs, arrodonint el resultat al nombre correcte de xifres significatives i decimals:
 - (a) $1,61 + 0,3 =$
 - (b) $5,935 - 4,51 =$
 - (c) $152,06 \cdot 0,24 =$
 - (d) $58,93 \cdot 0,1 =$
2. S'ha mesurat l'alçada (en metres) dels jugadors d'un equip de bàsquet i s'han obtingut els següents resultats:
1,85; 1,89; 1,92; 1,94; 1,96; 1,98; 1,97; 1,97; 2,04; 1,99
Calculeu la mitjana i desviació estàndard de la mostra.
3. Les longituds (en *mm*) de 10 peces fabricades en una màquina de control numèric han estat:
18,23; 18,67; 19,21; 19,43; 19,56; 20,18; 19,71; 19,15; 20,24; 19,99
Es demana calcular la mitjana i desviació estàndard de la mostra.
4. Havent fet una enquesta a 100 persones demanant quantes hores de televisió veien al dia, les respostes ha estat: 1 hora, 13 persones; 2 hores, 38 persones; 3 hores, 33 persones; 4 hores, 11 persones i 5 hores, 5 persones. Calculeu la mitjana i desviació estàndard de la mostra.

2 El moviment

2.1 Introducció

La cinemàtica és la part de la física que estudia el moviment dels cossos sense tenir en compte les seves causes. Definirem el **punt material** com un objecte sense mida, però amb massa. També l'anomenarem **mòbil**.

2.2 La posició

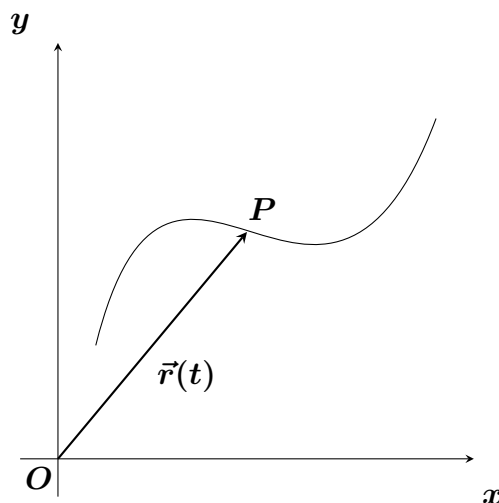
Per estudiar el moviment d'un mòbil, típicament farem servir un sistema de coordenades cartesià, de forma que la posició quedarà determinada en cada moment per les coordenades del punt on es trobi el mòbil. Per determinar la posició en un pla en tenim prou amb dues coordenades (x, y) . En canvi, per estudiar el moviment dels cossos a l'espai calen tres coordenades (x, y, z) .

2.3 El vector posició

Sovint descriurem la posició dels objectes mitjançant un vector anomenat **vector posició** $\vec{r}(t)$, que per definició és un vector amb origen l'origen de coordenades del sistema de referència O , i final les coordenades del punt P on es troba l'objecte que estem estudiant, de forma que és

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}$$

El vector posició determina la posició en funció del temps.

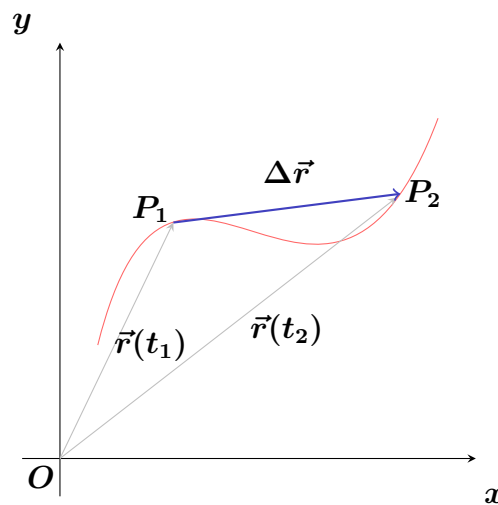


2.4 El vector desplaçament

Suposem que un mòbil descriu una trajectòria determinada, que en un instant t_1 es troba en el punt P_1 i que en un instant posterior t_2 es troba en el punt P_2 . Llavors el **vector desplaçament** entre aquests dos instants de temps t_1 , t_2 es calcula com

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

on $\vec{r}_2$, $\vec{r}_1$ són els vectors posició en cada temps.



Cal notar que es compleix sempre

$$|\Delta \vec{r}| \leq \Delta s$$

on Δs és la distància real sobre la trajectòria recorreguda per el mòbil (també anomenada longitud d'arc). Podeu dir en quines condicions es dona la igualtat?

Exemple 1

El vector posició en funció del temps (en unitats del SI), per un determinat objecte que es mou al pla, ve donat per $\vec{r}(t) = (t^2 + 1, t - 4)$. Es demana trobar el mòdul del vector desplaçament entre els instants $t_1 = 1 \text{ s}$, $t_2 = 5 \text{ s}$

Calculem

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(1) = (2, -3)$$

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(5) = (26, 1)$$

llavors

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(5) - \vec{r}(1) = (26, 1) - (2, -3) = (24, 4)$$

finalment

$$|\Delta \vec{r}| = |(24, 4)| = \sqrt{24^2 + 4^2} = \sqrt{592} = 24,33 \text{ m}$$

2.5 La velocitat

La velocitat d'un objecte indica la rapidesa amb que varia la seva posició en funció del temps. En el Sistema Internacional, la velocitat es mesura en m/s .

2.5.1 La velocitat mitjana

La velocitat mitjana $\vec{v}_m$ d'un objecte entre dos instants del temps t_1 , t_2 es calcula com

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

No hem de confondre la velocitat mitjana, que és un vector, amb la *celeritat* mitjana, que és un escalar definit com el quocient entre l'espai recorregut (entès com la longitud d'arc) i l'interval de temps què s'ha invertit.

Exemple 2

A partir de l'exemple 1, calculeu el mòdul de la velocitat mitjana entre els temps considerats.

Tenim que

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{(24, 4)}{4} = (6, 1)$$

i el mòdul val

$$|\vec{v}_m| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37} = 6,08 \text{ m/s}$$

2.5.2 La velocitat instantània

La velocitat instantània $\vec{v}(t)$, d'un objecte es calcula com

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t)$$

que no és més que la *derivada* del vector posició respecte el temps. Aquest vector és sempre tangent a la trajectòria sigui quina sigui aquesta.

De cara als exercicis cal recordar que per una funció polinòmica qualsevol de grau n

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + a_n t^n$$

tenim

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \dot{f}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots + na_n t^{n-1}$$

Exemple 3

Donats el següents vectors posició, trobeu la velocitat instantània en cada cas:

a) $\vec{r}_1 = (3t^2 + 5t, 2t^6)$

b) $\vec{r}_2 = (5 - t^3 - 6t^4, \frac{7}{4}t^4 + t^{10})$

En el primer cas tenim

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \dot{\vec{r}}_1(t) = (6t + 5, 12t^5)$$

En el segon,

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \dot{\vec{r}}_2(t) = (-3t^2 - 24t^3, 7t^3 + 10t^9)$$

També pot ser útil l'anomenada *regla de la cadena* per derivar funcions compostes

$$\frac{df(g(t))}{dt} = \dot{f}(g(t)) \cdot \dot{g}(t)$$

Exemple 4

Donades les següents funcions, trobeu la seva derivada respecte el temps:

a) $\alpha(t) = (3t^4 - 2t^5)^4$

b) $\beta(t) = (6 - t^{10} + 4t^2 - 9t)^5$

Tenim

$$\dot{\alpha}(t) = 4 (3t^4 - 2t^5)^3 \cdot (12t^3 - 10t^4)$$

i

$$\dot{\beta}(t) = 5 (6 - t^{10} + 4t^2 - 9t)^4 \cdot (-10t^9 + 8t - 9)$$



2.5.3 La velocitat i el sistema de referència

La velocitat d'un objecte depèn del sistema de referència respecte al qual es mou. Quan tenim diversos objectes en un mateix sistema de referència, podem considerar la **velocitat relativa** d'un d'ells respecte un altre. D'aquesta manera, si volem calcular la velocitat relativa d'un cos 2 respecte un altre 1 farem

$$\vec{v}_{2,1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Exemple 5

Suposem que circulem per una carretera de doble sentit amb un cotxe que té una velocitat **90 km/h**. Per una banda, veiem venir per l'altre carril una moto que circula a **70 km/h** i per l'altre un camió que se'ns acosta per darrera a **75 km/h**. Calculeu, en **km/h**:

- a) La velocitat relativa de la moto respecte el cotxe.
- b) La velocitat relativa del camió respecte el cotxe.
- c) La velocitat relativa del camió respecte la moto.

Tenint en compte els signes de la velocitat en cada cas, tenim:

$$\vec{v}_{moto, cotxe} = -70 - 90 = -160 \text{ km/h}$$

$$\vec{v}_{cam, cotxe} = 75 - 90 = -15 \text{ km/h}$$

$$\vec{v}_{cam, moto} = -75 - 70 = -145 \text{ km/h}$$

2.6 L'acceleració

L'acceleració d'un objecte en moviment representa com varia la seva velocitat. Si aquesta augmenta diem que el cos està accelerant; si disminueix, direm que està frenant. És important tenir en compte que un objecte accelera si la seva acceleració té el mateix signe que la velocitat, sigui quin sigui aquest signe, positiu o negatiu i si l'acceleració i la velocitat tenen signe contrari, llavors l'objecte en moviment està frenant. En qualsevol cas cal recordar que la velocitat és un vector i quan parlem de la seva variació, aquesta pot ser en mòdul i/o direcció. Aquest detall serà important quan parlem de moviment circular. En el Sistema Internacional l'acceleració es mesura en m/s^2 .

2.6.1 L'acceleració mitjana

L'acceleració mitjana $\vec{a}_m$ d'un objecte en moviment, entre dos instants de temps t_1 , t_2 es defineix com

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Exemple 6

El vector velocitat en funció del temps (en unitats del SI), per un determinat objecte ve donat per $\vec{v}(t) = (2t^3 - 2, 3t + 5)$. Es demana trobar el mòdul del vector acceleració mitjana entre els instants $t_1 = 1 s$, $t_2 = 3 s$

Calculem

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}(1) = (0, 8)$$

$$\vec{v}(t_2) = \vec{v}(3) = (52, 14)$$

llavors

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(3) - \vec{v}(1) = (52, 14) - (0, 8) = (52, 6)$$

Ara

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{(52, 6)}{2} = (26, 3)$$

finalment

$$|\vec{a}_m| = |(26, 3)| = \sqrt{26^2 + 3^2} = \sqrt{685} = 26,17 m/s$$

2.6.2 L'acceleració instantània

Si en l'expressió de l'acceleració mitjana prenem intervals de temps cada cop més petits, obtenim l'acceleració instantània.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

La direcció d'aquest vector és tangent a la trajectòria (en moviments rectilinis) i el seu sentit és igual o oposat al de la velocitat.

Exemple 7

El vector posició en funció del temps (en unitats del SI), per un determinat objecte ve donat per

$$\vec{r}(t) = (2 - t^3 + 6t^5, 3t^4 + 5t^7)$$

Es demana trobar, el vector velocitat instantània i el vector acceleració instantània en funció del temps.

És fàcil calcular

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (-3t^2 + 30t^4, 12t^3 + 35t^6)$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (-6t + 120t^3, 36t^2 + 210t^5)$$

Exercicis

1. El vector posició d'un mòbil ve donat per $\vec{r}(t) = (6t^3 + 2, 3t^2)$, en unitats del SI. Es demana:
 - (a) El vector desplaçament entre els instants $t_1 = 1 \text{ s}$ i $t_2 = 3 \text{ s}$
 - (b) El mòdul del desplaçament entre aquests instants.
 - (c) La velocitat mitjana entre aquests instants del temps i el seu mòdul.
 - (d) La velocitat instantània en funció del temps.
 - (e) L'acceleració mitjana entre els mateixos instants de temps i el seu mòdul.
 - (f) L'acceleració instantània en funció del temps.

3 Cinemàtica del punt

3.1 Moviment rectilini

En aquesta secció estudiarem el moviment en una dimensió de cossos puntuals sotmesos a una acceleració constant. Les equacions més generals que descriuen aquest tipus de moviment són:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad (1)$$

$$v = v_0 + a(t - t_0) \quad (2)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (3)$$

On x és la posició del mòbil respecte un cert origen de referència, x_0 és la posició per a $t = 0$, v_0 és la velocitat per a $t = 0$, a l'acceleració, suposada constant, v la velocitat i t el temps. Quan l'acceleració és igual a zero les anteriors equacions queden resumides en

$$x = x_0 + v(t - t_0) \quad (4)$$

A l'hora de resoldre problemes, les equacions (1), (2) i (3) habitualment es poden escriure d'una forma més senzilla. N'hi ha prou de triar adequadament els valors de x_0 i t_0 . Això s'anomena triar l'origen d'espai i de temps i es correspon amb escollir un sistema de coordenades adequat al problema en qüestió. Això sempre es podrà fer si hem d'escriure les equacions del moviment per un sol mòbil. Si en tenim dos o més, només podrem privilegiar un d'ells.

3.1.1 Casos amb un sol mòbil

En aquests casos, tal com s'ha dit abans, si demanem que per $t = 0$ la posició sigui $x = 0$, podem treballar amb la següent versió (simplificada) de les equacions anteriors

$$x = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad (5)$$

$$v = v_0 + at \quad (6)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \quad (7)$$

Exemple 1

Un cotxe necessita **15 s** per arribar a una velocitat de **108 km/h** partint del repòs. Es demana calcular l'espai recorregut en aquest temps. Suposant que després frena amb una acceleració de **3 m/s²**, calculeu el temps que triga a aturar-se.

Comencem passant la velocitat al SI

$$108 \frac{km}{h} \cdot \frac{1000 m}{1 km} \cdot \frac{1 h}{3600 s} = 30 m/s$$

A pesar de que tenim com a dades una velocitat i un temps, **NO** podem calcular l'espai recorregut mitjançant la fórmula

$$x = vt$$

per obtenir

$$x = 30 \cdot 15 = 450 m$$

ja que la velocitat *no* és constant (ens diuen que parteix del repòs). Necessitem calcular primer l'acceleració. Ho fem amb

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$30 = 0 + a \cdot 15$$

d'on obtenim

$$a = 2 m/s^2$$

Ara sí, per calcular l'espai recorregut podem fer

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 0 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15^2 = 225 m$$

Finalment, si ara frena fins a aturar-se, per trobar el temps emprat farem

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$0 = 30 + (-3) \cdot t$$

$$t = \frac{30}{3} = 10 s$$

Exemple 2

Un vehicle que es movia amb velocitat $v_0 = 20 \text{ m/s}$ accelera amb $a = 2 \text{ m/s}^2$ al llarg d'una distància de 300 m . Es demana calcular el temps que tarda a recórrer aquesta distància i la velocitat que assoleix.

A partir de les dades del enunciat i la relació

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

podem escriure

$$300 = 20t + \frac{1}{2} \cdot 2t^2$$

d'on

$$t^2 + 20t - 300 = 0$$

amb solucions

$$\begin{aligned} t &= \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-300)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 1200}}{2} = \frac{-20 \pm 40}{2} \end{aligned}$$

com que ens interessa l'evolució cap el futur del problema, prenem la solució positiva que és $t = 10 \text{ s}$. Ara, amb

$$v = v_0 + at$$

podem trobar

$$v = 20 + 2 \cdot 10 = 40 \text{ m/s}$$

Exemple 3

Un vehicle canvia la seva velocitat de 10 m/s a 30 m/s al llarg d'un recorregut de 100 m . Calculeu la seva acceleració i el temps que tarda a recórrer aquests 100 m .

En aquest cas ens interessa fer servir la relació

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

amb les dades de l'enunciat

$$30^2 = 10^2 + 2a \cdot 100$$

de forma que l'acceleració val

$$a = \frac{30^2 - 10^2}{2 \cdot 100} = \frac{900 - 100}{200} = 4 \text{ m/s}^2$$

Finalment, amb $v = v_0 + at$, podem calcular el temps demanat

$$30 = 10 + 4t \rightarrow t = \frac{30 - 10}{4} = 5 \text{ s}$$

Exemple 4

Un tren que parteix d'una velocitat desconeguda assoleix una velocitat de $v = 25 \text{ m/s}$ en un temps de 20 s al llarg d'un espai de 300 m . Calculeu l'acceleració del tren i la velocitat inicial.

En aquest cas no tenim més remei que plantejar un sistema d'equacions. Podem fer servir

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad v = v_0 + a t$$

amb les dades de l'enunciat tindrem

$$\begin{cases} 300 = v_0 \cdot 20 + \frac{1}{2} a \cdot 20^2 \\ 25 = v_0 + a \cdot 20 \end{cases}$$

que es pot reescriure com

$$\begin{cases} 2v_0 + 20a = 30 \\ v_0 + 20a = 25 \end{cases}$$

ara, multiplicant la segona equació per 2

$$\begin{cases} 2v_0 + 20a = 30 \\ 2v_0 + 40a = 50 \end{cases}$$

i restant (de baix a dalt) per obtenir

$$20a = 20 \rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2$$

i finalment

$$v_0 + 20a = 25 \rightarrow v_0 = 25 - 20a = 25 - 20 \cdot 1 = 5 \text{ m/s}$$

Exemple 5

Un objecte que té una velocitat $v_0 = 10 \text{ m/s}$ accelera al llarg de **100 m** en un temps de **5 s**. Calculeu l'acceleració de l'objecte i la velocitat final.

A partir de l'equació

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

i fent servir les dades de l'enunciat podem escriure

$$100 = 10 \cdot 5 + \frac{1}{2} a \cdot 5^2$$

d'on

$$a = 2 \cdot \frac{100 - 10 \cdot 5}{25} = 4 \text{ m/s}^2$$

i finalment

$$v = v_0 + at = 10 + 4 \cdot 5 = 30 \text{ m/s}$$

Exemple 6

Un vehicle accelera amb $a = 1 \text{ m/s}^2$ des d'una velocitat inicial desconeguda fins a una final $v = 40 \text{ m/s}$ en un recorregut de **152 m**. Calculeu el temps que ha tardat i la velocitat inicial.

En aquest cas podem fer servir l'expressió

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

que, amb les dades de l'enunciat, s'escriu com

$$40^2 = v_0^2 + 2 \cdot 1 \cdot 152$$

d'on

$$v_0 = \sqrt{40^2 - 304} = \sqrt{1296} = 36 \text{ m/s}$$

i el temps demanat es pot trobar a partir de

$$v = v_0 + at$$

i és

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{40 - 36}{1} = 4 \text{ s}$$

Exemple 7

Un objecte recorre **500 m** en un temps de **10 s** amb una acceleració **$a = 2 \text{ m/s}^2$** . Calculeu la velocitat inicial i la final.

Fent servir la relació

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

i amb les dades de l'enunciat

$$500 = v_0 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2$$

d'on

$$v_0 = \frac{500 - 100}{10} = 40 \text{ m/s}$$

i la velocitat final es troba directament amb

$$v = v_0 + at = 40 + 2 \cdot 10 = 60 \text{ m/s}$$

Exercicis

1. Calculeu l'espai que recorre un vehicle que es mou amb velocitat constant de **72 km/h** en un temps d'un minut.
2. Un objecte parteix del repòs i arriba a una velocitat de **10 m/s** en 20 segons. Trobeu l'espai que ha recorregut. Compareu el resultat amb el que obtindríem si la velocitat del mòbil hagués estat també de **10 m/s** però constant al llarg de tot el moviment.
3. Considereu un cotxe que circula a una velocitat de **108 km/h** , frena i queda aturat en 5 segons. Es demana:
 - (a) Calculeu l'acceleració amb que frena.
 - (b) Trobeu l'espai que ha recorregut.
4. Un mòbil es mou amb velocitat **72 km/h** i de sobte frena amb una acceleració de **2 m/s^2** . Trobeu:
 - (a) El temps que triga a aturar-se.
 - (b) L'espai que ha recorregut.
5. Un cotxe que circula a **36 km/h** accelera durant 5 segons fins arribar a una velocitat de **108 km/h** . Manté aquesta velocitat durant 20 segons i després frena fins aturar-se en 10 segons. Es demana:
 - (a) Calculeu l'acceleració en cada tram del moviment.
 - (b) Calculeu l'espai total recorregut.

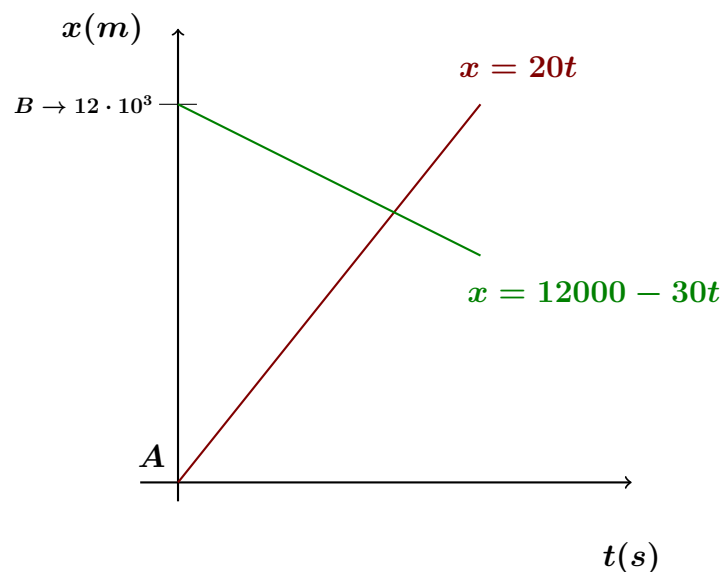
3.1.2 Casos amb dos mòbils

En aquestes situacions és recomanable resoldre el problema de forma gràfica i escriure les equacions del moviment dels mòbils. Sempre podrem privilegiar algun dels dos situant-lo en l'origen d'espai i temps de manera que per ell, les equacions del moviment s'escriuran de forma senzilla.

Exemple 1

Dos cotxes surten alhora, en sentit contrari, de dos punts **A** i **B**, separats una distància de **12 km**. Un circula amb una velocitat de **20 m/s** i l'altre amb velocitat **30 m/s**. Calculeu el temps que tarden a trobar-se i a quina distància ho fan des del punt d'on va sortir el que surt del punt **A**.

Podem representar la situació amb el gràfic



Les equacions del moviment per cada mòbil s'obtenen a partir de

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

Si posem l'origen de coordenades i temps al punt **A**, tindrem

$$\begin{cases} A \rightarrow x = 20t \\ B \rightarrow x = 12000 - 30t \end{cases}$$

d'on

$$20t = 12000 - 30t$$

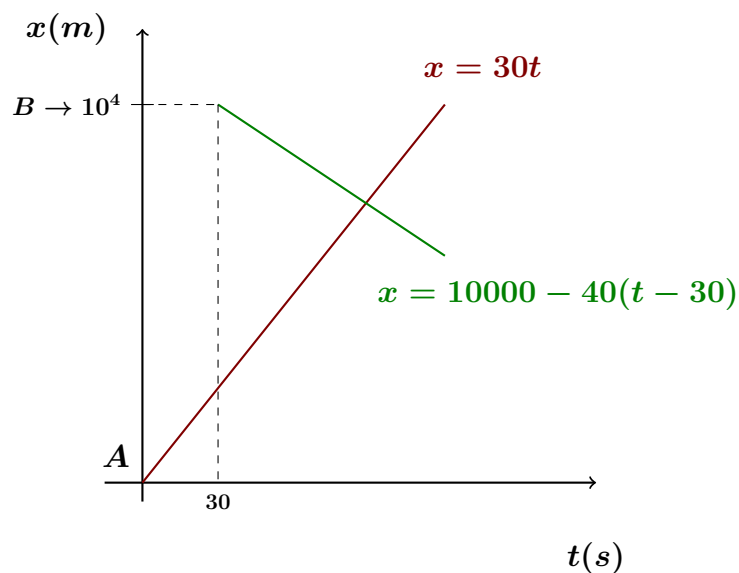
i finalment,

$$t = 240 \text{ s}, \quad x = 4800 \text{ m}$$

Exemple 2

Dos cotxes surten de dos punts **A** i **B**, separats una distància de **10 km**. Un circula amb una velocitat de **30 m/s** i l'altre (que surt **30 s** més tard que l'altre) amb velocitat **40 m/s**. Suposant que es mouen en sentit contrari, calculeu el temps que tarden a trobar-se i a quina distància ho fan des del punt d'on va sortir el primer.

Podem representar la situació amb el gràfic



Les equacions del moviment per cada mòbil s'obtenen a partir de

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

Si posem l'origen de coordenades i temps al punt **A**, tindrem

$$\begin{cases} A \rightarrow x = 30t \\ B \rightarrow x = 10000 - 40(t - 30) \end{cases}$$

d'on

$$30t = 10000 - 40t + 1200$$

i finalment,

$$t = 160 \text{ s}, \quad x = 4800 \text{ m}$$

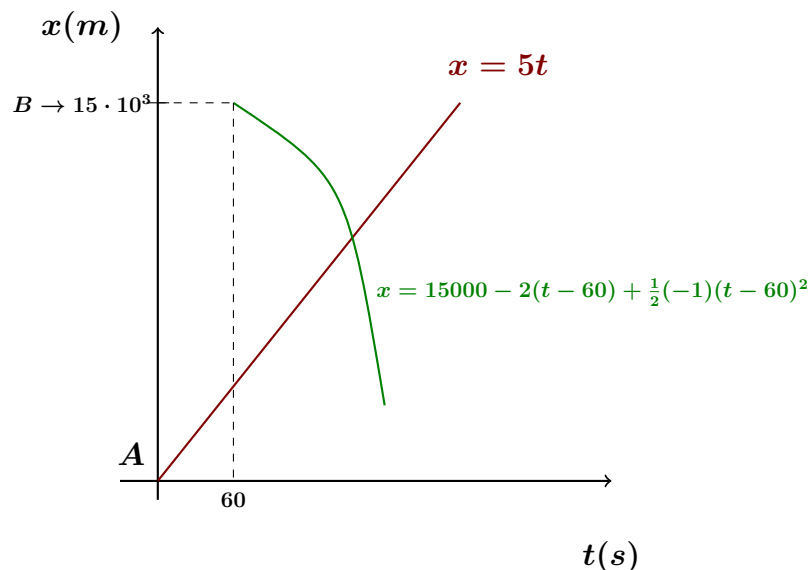
Notem que el temps calculat es mesura respecte al cotxe que surt del punt A, així com l'espai recorregut. Si volem saber el temps que tarden a trobar-se i l'espai recorregut respecte al segon cotxe hauríem de fer

$$t = 160 - 30 = 130 \text{ s} \quad x = 10000 - 4800 = 5200 \text{ m/s}$$

També podríem haver resolt el problema posant el cotxe que surt des de **B** a l'origen d'espai i temps. En aquests tipus d'exercicis sempre podrem triar quin objecte posem en aquest origen.

Exemple 3

Una bicicleta surt d'una ciutat **A** en direcció a una altra **B** (separades **15 km**) amb una velocitat constant de **5 m/s**. Un minut després, un cotxe que passava per **B** amb velocitat **2 m/s** i amb acceleració **1 m/s²** es dirigeix cap a **A**. Es demana calcular el temps que tarden a trobar-se i a quina distància de **A** ho fan.



Si posem a l'origen d'espai i temps la bicicleta, les equacions del moviment per cada mòbil són

$$\begin{cases} A \rightarrow x = x_0 + v(t - t_0) \\ B \rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \end{cases}$$

Amb les dades de l'exemple, tindrem

$$\begin{cases} A \rightarrow x = 5t \\ B \rightarrow x = 15000 - 2(t - 60) + \frac{1}{2}(-1)(t - 60)^2 \end{cases}$$

d'on

$$5t = 15000 - 2(t - 60) + \frac{1}{2}(-1)(t - 60)^2$$

fem distributives i desenvolupem el quadrat fent servir

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$5t = 15000 - 2t + 120 + \frac{1}{2}(-1)[t^2 - 120t + 3600]$$

multipliquem per 2 als dos membres de l'equació per tal de treure denominadors i fem la darrera distributiva pendent

$$10t = 30000 - 4t + 240 + (-1)[t^2 - 120t + 3600]$$

$$10t = 30000 - 4t + 240 - t^2 + 120t - 3600$$

reordenant termes i fent operacions, obtenim

$$t^2 - 106t - 26640 = 0$$

amb solucions

$$t = \frac{106 \pm \sqrt{106^2 + 4 \cdot 26640}}{2} = \frac{106 \pm 343,21}{2}$$

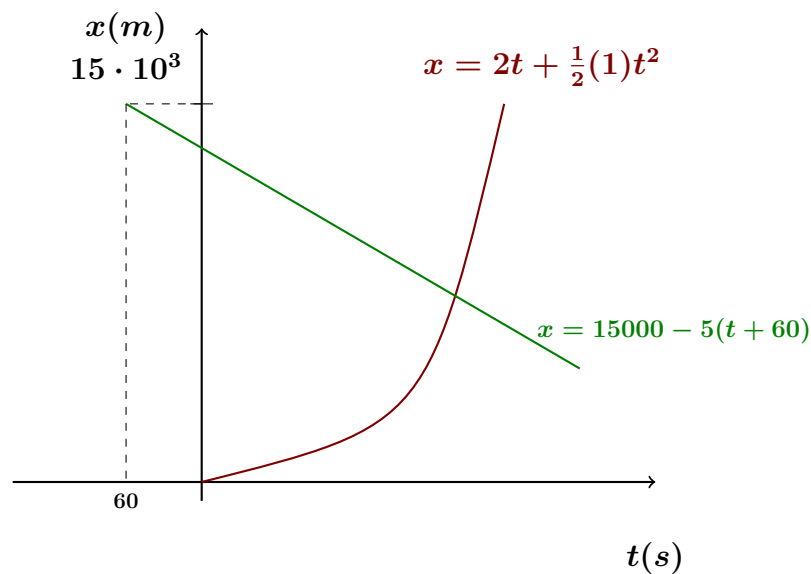
$$t_1 = 224,6 \text{ s}, \quad t_2 = -118,6 \text{ s}$$

Degut a les condicions del problema, només t_1 té sentit com a solució. L'espai recorregut es pot calcular com

$$x = 5t = 5 \cdot 224,6 = 1123 \text{ m}$$

Noteu que l'acceleració del cotxe està afectada d'un signe negatiu perquè va en sentit contrari a la marxa de la bicicleta (que hem posat a l'origen d'espai i temps), no perquè estigui frenant.

Veiem a continuació com podríem resoldre l'exemple posant el mòbil que té acceleració a l'origen d'espai i temps. Això farà que la seva equació sigui molt més senzilla. Naturalment, l'equació del que es mou amb velocitat constant canviarà.



Hem de resoldre el sistema d'equacions.

$$\begin{cases} x = 15000 - 5(t + 60) \\ x = 2t + \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

igualant, fent distributives i multiplicant per dos en tots els termes per treure denominadors, tenim

$$30000 - 10t - 600 = 4t + t^2$$

reordenant

$$t^2 + 14t - 29400 = 0$$

d'on

$$t = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 + 4 \cdot 29600}}{2} = \frac{-14 \pm \sqrt{118596}}{2} = \frac{-14 \pm 344,38}{2}$$

$$t_1 = 165,2 \text{ s}, \quad t_2 = -179,19 \text{ s}$$

ens quedarem amb la solució positiva ja que ens interessa l'evolució cap al futur del problema. En quant al lloc on es troben

$$x = 2t + \frac{1}{2}t^2 = 2 \cdot 165,2 + \frac{1}{2} \cdot 165,2^2 = 13975,92 \text{ m}$$

Exercicis

1. Dos vehicles separats inicialment una distància de **10 km** es mouen en sentit contrari amb velocitats $v_1 = 10 \text{ m/s}$ i $v_2 = 18 \text{ m/s}$. Calculeu quant de temps tarden a creuar-se i a quina distància ho fan des del punt on va sortir el primer.
2. Un cotxe circula a una velocitat $v = 72 \text{ km/h}$ en una zona escolar. Un cotxe de policia el veu passar pel seu costat i inicia una persecució accelerant amb $a = 3 \text{ m/s}^2$. Quan atrapa l'altre cotxe? Quina serà la velocitat del cotxe de policia en aquell moment?
3. Dos cotxes que es trobaven separats **500 m** de distància es mouen en sentit contrari, l'un amb velocitat inicial 3 m/s i acceleració 2 m/s^2 i l'altre amb velocitat inicial 4 m/s i acceleració 5 m/s^2 . Es demana
 - (a) Calculeu el temps que tarden a trobar-se.
 - (b) Suposant ara que el segon té velocitat inicial 35 m/s i frena amb 1 m/s^2 , calculeu el temps que tarden a trobar-se, abans que s'aturi.
4. Una persona es troba a una distància de **30 m** d'una parada de bus quan veu que el que ha d'agafar arrenca amb acceleració $a = 2 \text{ m/s}^2$. En el mateix instant, comença a córrer amb velocitat $v = 10 \text{ m/s}$. Feu els càlculs necessaris per esbrinar si arribarà a agafar-lo. Repetiu l'exercici suposant ara que el conductor s'ha entretingut **2 s**.

3.2 Moviment de projectils

3.2.1 Moviment vertical

En els casos en que un objecte es llança o deixa caure verticalment, les equacions a utilitzar són formalment les mateixes que les de la secció anterior. S'ha de tenir present però, que en aquests casos l'acceleració és sempre coneguda, ja que és la de la gravetat terrestre ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$). L'espai l'anomenarem y , altura, per comoditat, i hem de tenir en compte que si l'objecte va cap a dalt prendrem la velocitat amb signe positiu i negatiu si va cap abaix. D'acord amb tot això i com l'acceleració de la gravetat va sempre cap abaix, escriurem les equacions de la següent forma:

$$y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \quad (8)$$

$$v = v_0 - g(t - t_0) \quad (9)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \quad (10)$$

Una vegada més, insistir en que, si podem triar les condicions inicials, les equacions a utilitzar es simplifiquen notablement.

Exemple 1

Llançem un objecte cap amunt des del terra amb velocitat inicial 10 m/s . Es demana calcular el temps que tarda en arribar a l'altura màxima i el valor d'aquesta altura.

Les equacions del moviment i la velocitat són

$$y = 10t - \frac{1}{2}gt^2; \quad v = 10 - gt$$

Quan arriba a l'altura màxima la velocitat val zero, llavors

$$0 = 10 - gt; \quad t = \frac{10}{g} = 1,02 \text{ s}$$

en quant a l'altura màxima

$$y = 10t - \frac{1}{2}gt^2 = 10 \cdot 1,02 - \frac{1}{2}9,8 \cdot 1,02^2 = 5,102 \text{ m}$$

Exemple 2

Es deixa caure un objecte des d'una altura de **40 m**. Es demana calcular el temps que tarda en arribar al terra i amb quina velocitat ho fa.

Si prenem l'origen d'altura al terra, les equacions del moviment i la velocitat són

$$y = 40 - \frac{1}{2}gt^2; \quad v = -gt$$

Quan arribi al terra serà $y = 0$, per tant

$$0 = 40 - \frac{1}{2}gt^2; \quad t = \sqrt{\frac{80}{9,8}} = 2,86 \text{ s}$$

Llavors, la velocitat amb que arriba es pot calcular com

$$v = -gt = -9,8 \cdot 2,86 = -28 \text{ m/s}$$

Exemple 3

Es llança un objecte cap a dalt des d'una altura de **30 m** amb una velocitat $v = 15 \text{ m/s}$. Es demana calcular el temps que tarda a arribar a terra i amb quina velocitat ho fa.

Suposant que descrivim el moviment des del terra, les equacions del moviment i la velocitat són

$$y = 30 + 15t - \frac{1}{2}gt^2; \quad v = 15 - gt$$

Trobem el temps que tarda en arribar al terra demanant que sigui $y = 0$

$$0 = 30 + 15t - \frac{1}{2}gt^2; \quad gt^2 - 30t - 60 = 0$$

d'on

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900 + 240 \cdot g}}{2g} = 4,44 \text{ s}$$

i en quant a la velocitat

$$v = 15 - 9,8 \cdot 4,44 = -28,5 \text{ m/s}$$

Exemple 4

Es llança un objecte **A** cap a dalt des d'una altura de **20 m** amb una velocitat **$v = 15 \text{ m/s}$** . Al mateix temps es llança des del terra un altre objecte **B** amb velocitat **25 m/s** . Es demana calcular el temps que tarden a trobar-se, a quina alçada ho fan i si en aquell moment pugen o baixen.

Suposant que descrivim el moviment des del terra, les equacions del moviment i la velocitat per cada objecte són

$$A \quad y = 20 + 15t - \frac{1}{2}gt^2; \quad v = 15 - gt$$

$$B \quad y = 25t - \frac{1}{2}gt^2; \quad v = 25 - gt$$

Quan es troben, ho fan a la mateixa altura, de forma que

$$20 + 15t - \cancel{\frac{1}{2}gt^2} = 25t - \cancel{\frac{1}{2}gt^2}$$

d'on

$$t = 2 \text{ s}$$

L'altura a la que es troben es pot calcular fent servir, per exemple, l'equació del moviment del segon cos. Així

$$y = 25 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 2^2 = 30,4 \text{ m}$$

En quant a la velocitat

$$v_A = 15 - 9,8 \cdot 2 = -4,6 \text{ m/s}; \quad v_B = 25 - 9,8 \cdot 2 = 5,4 \text{ m/s}$$

De manera que **A** baixava i **B** pujava quan es troben.

Exemple 5

Es llança un objecte **A** cap a dalt des d'una altura de **30 m** amb una velocitat **$v = 10 \text{ m/s}$** . Al cap d'un segon, llança des del terra un altre objecte **B** amb velocitat **20 m/s** . Es demana esbrinar si quan es troben pugen o baixen.

Suposant que descrivim el moviment des del terra, les equacions del moviment i la velocitat per cada objecte són

$$\text{A} \quad y = 30 + 10t - \frac{1}{2}gt^2; \quad v = 10 - gt$$

$$\text{B} \quad y = 20(t - 1) - \frac{1}{2}g(t - 1)^2; \quad v = 20 - g(t - 1)$$

Quan es troben, ho fan a la mateixa altura, de forma que

$$30 + 10t - \frac{1}{2}gt^2 = 20(t - 1) - \frac{1}{2}g(t - 1)^2$$

llavors, desenvolupant quadrats

$$30 + 10t - \frac{1}{2}gt^2 = 20(t - 1) - \frac{1}{2}g(t^2 - 2t + 1)$$

i fent distributives

$$30 + 10t - \cancel{\frac{1}{2}gt^2} = 20t - 20 - \cancel{\frac{1}{2}gt^2} + gt - \frac{1}{2}g$$

Com veiem queda una equació de primer grau. Multipliquem per 2 els dos membres de l'equació per obtenir

$$60 + 20t = 40t - 40 + 2gt - g$$

d'on

$$(20 + 2g)t = 100 + g$$

i finalment

$$t = \frac{100 + g}{20 + 2g} = 2,77 \text{ s}$$

En quant a la velocitat

$$v_A = 10 - 9,8 \cdot 2,77 = -17,15 \text{ m/s}; \quad v_B = 20 - 9,8 \cdot (2,77 - 1) = 2,65 \text{ m/s}$$

De manera que **A** baixava i **B** pujava quan es troben.

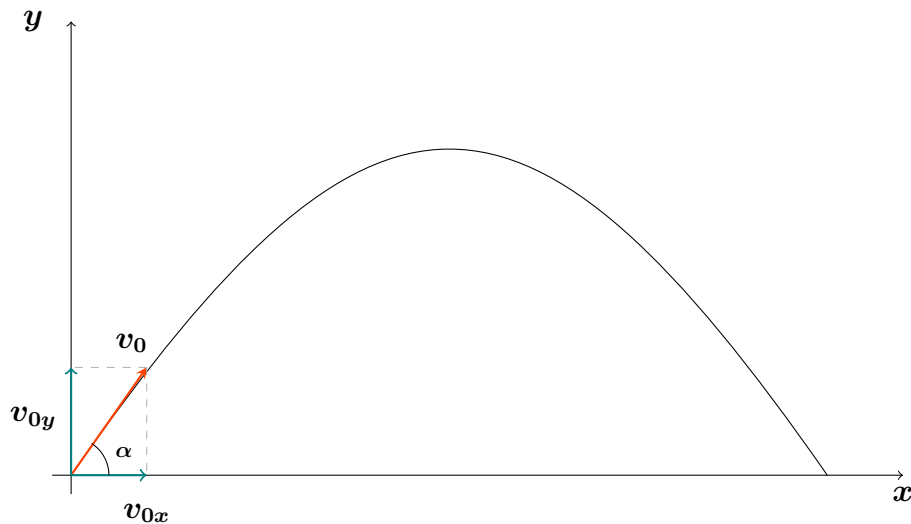
Exercicis

1. Suposem que tenim un objecte a **20 m** d'alçada. Es demana calcular el temps que tarda en arribar al terra i la velocitat amb la que ho fa en els següents casos:
 - (a) Es llança cap amunt amb velocitat **15 m/s**
 - (b) Es deixa caure
 - (c) Es llança cap abaix amb velocitat **10 m/s**
2. Una càrrega de maons està sent pujada amb una grua a una velocitat de **5 m/s** quan, a sis metres del terra, un maó es desprèn. Descriure el moviment del maó. Quina és l'altura màxima que assoleix respecte el terra? Quant de temps tarda a arribar a terra? Amb quina velocitat ho fa?
3. Es deixa caure una pilota des del terrat d'un edifici. En el mateix instant es llança verticalment i cap a dalt una altra pilota des de terra amb una velocitat **$v_0 = 9 \text{ m/s}$** . Les pilotes xoquen **1,8** segons més tard. Trobeu l'alçada de l'edifici.
4. Es deixa caure una pedra al fons d'un pou de profunditat desconeguda i se sent el soroll de l'impacte amb el fons al cap de **5 s**. Calculeu la profunditat del pou tenint en compte que la velocitat de so és de **340 m/s**.
5. Es llança cap a dalt des d'una altura de **80 m** un objecte amb velocitat **20 m/s**. Trobeu la distància recorreguda en els darrers **2 s** de moviment.
6. Calculeu l'acceleració de la gravetat a la lluna sabent que un objecte llançat cap a dalt des del terra amb velocitat **10 m/s** tarda **12,5 s** en tornar al terra.
7. (*Exercici d'ampliació.*) Un alumne que es troba a la seva habitació en una residència d'estudiants veu caure per la finestra un globus ple d'aigua. S'apropa a la finestra i mesura que el temps que un segon globus tarda en recórrer els **1,2 m** de la seva finestra és **$t = 0,1 \text{ s}$** . Si suposem que els globus s'han deixat caure des del repòs, des de quina altura respecte la part inferior de la seva finestra s'estan llançant?

3.2.2 Tir parabòlic

En aquesta secció treballarem l'anomenat tir parabòlic, l'estudi del qual es fa considerant el moviment com una composició en els eixos horitzontal i vertical. Son necessàries algunes idees de trigonometria, que se suposen conegudes, però que podeu repassar en [aquest](#) document.

Suposem doncs que es llança un cos amb una velocitat v_0 que forma un angle α respecte l'horitzontal.



L'única acceleració és la gravitatòria en l'eix vertical, per això les equacions del moviment són, per l'eix OX :

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \quad (11)$$

$$v_x = v_{0x} \quad (12)$$

i per l'eix OY :

$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \quad (13)$$

$$v_y = v_{0y} - g(t - t_0) \quad (14)$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \quad (15)$$

Tenint en compte que és:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

i suposant que només es llança un objecte, podrem demanar $t_0 = 0$ de forma que les equacions del moviment s'escriuran

$$x = v_0 \cos \alpha t$$

$$y = y_0 + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

i la de la velocitat vertical

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

En el tir parabòlic és típic voler conèixer:

- Temps de vol t_{vol}
- Abast màxim x_{max}
- Altura màxima y_{max}
- Velocitat en qualsevol temps (en particular amb la que arriba a terra)
- Equació de la trajectòria

Suposem primer per simplicitat que $y_0 = 0$.

Temps de vol. Trobarem per quins valors del temps és $y = 0$,

$$0 = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

d'on

$$\begin{cases} t = 0 \\ t_v = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \end{cases}$$

Abast màxim. En tenim prou de substituir el temps de vol que acabem de calcular a l'apartat anterior en l'equació del moviment per la x . Llavors

$$x_{max} = v_0 \cos \alpha t_v = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Altura màxima. Aprofitarem la simetria de la paràbola i calcularem l'altura a la que es troba quan ha transcorregut la meitat del temps de vol, així

$$y_{max} = y\left(\frac{t_v}{2}\right) = v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

També podríem haver calculat el temps que tarda en arribar a l'altura màxima amb

$$0 = v_0 \sin \alpha - gt$$

que era la condició que imposàvem en els exercicis de moviment vertical, de forma que

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

i ara podem substituir aquest valor del temps en l'equació del moviment

$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

per obtenir el mateix resultat

$$y_{max} = v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Velocitat per qualsevol temps. Es pot calcular com

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}$$

Cal tenir present que tots els resultats anteriors no s'han de prendre com fórmules a aplicar “a cegues” als exercicis si no que pretenen mostrar el procés de càlcul dels paràmetres típics dels exercicis de tir parabòlic en general.

Equació de la trajectòria. Es tracta de trobar l'equació $y = y(x)$ a partir de les equacions conegudes $x = x(t)$, $y = y(t)$. Considerem el sistema

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

aïllem el temps de la primera

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

i substituïm a la segona

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

que es pot escriure de forma més compacta com

$$y = x \tan \alpha - \frac{g \sec^2 \alpha}{2v_0^2} x^2$$

i com es pot veure fàcilment és l'equació d'una paràbola amb les “banyes” cap a baix.

Exemple 1

Es llança des del terra un objecte amb velocitat inicial $v = 16 \text{ m/s}$ que forma un angle de 30° amb l'horitzontal. Es demana trobar: temps de vol, abast màxim, altura màxima, velocitat total **0,5** segons abans que arribi al terra i equació de la trajectòria.

Les equacions del moviment i de la velocitat són

$$\begin{cases} x = 16 \cos 30^\circ t \\ y = 16 \sin 30^\circ t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = 16 \sin 30^\circ - gt \end{cases}$$

que es poden escriure com

$$\begin{cases} x = 13,86t \\ y = 8t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = 8 - gt \end{cases}$$

Per trobar el temps de vol demanem $y = 0$

$$0 = 8t - \frac{1}{2}gt^2 = t \left(8 - \frac{1}{2}gt \right)$$

d'on

$$\begin{cases} t = 0 \\ 8 - \frac{1}{2}gt = 0 \rightarrow t = \frac{16}{g} = \frac{16}{9,8} = 1,633 \text{ s} \end{cases}$$

Ara, podem calcular l'abast màxim com

$$x = 13,86t = 13,86 \cdot 1,633 = 22,63 \text{ m}$$

Per calcular l'altura màxima trobem el temps que tarda a arribar a dalt de tot, la condició és $v_y = 0$, llavors

$$0 = 8 - gt \rightarrow t = \frac{8}{g} = \frac{8}{9,8} = 0,82 \text{ s}$$

ara posem aquest valor del temps a l'equació del moviment que controla la y

$$y(0,82) = 8 \cdot 0,82 - \frac{1}{2}9,8 \cdot 0,82^2 = 3,265 \text{ m}$$

Finalment, quan falta $0,5 \text{ s}$ per arribar al terra el temps és

$$t = 1,633 - 0,5 = 1,133 \text{ s}$$

i la velocitat total en aquest moment

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \\ &= \sqrt{(13,86)^2 + (8 - 9,8 \cdot 1,133)^2} \\ &= 14,20 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Per trobar l'equació de la trajectòria partim de

$$\begin{cases} x = 16 \cos 30^\circ t \\ y = 16 \sin 30^\circ t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

aïllant el temps de la primera equació

$$t = \frac{x}{16 \cos 30^\circ}$$

i substituint en la segona

$$y = 16 \sin 30^\circ \cdot \frac{x}{16 \cos 30^\circ} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{16 \cos 30^\circ} \right)^2$$



que es pot escriure com

$$y = x \tan 30^\circ - \frac{g \sec^2 30^\circ}{512} \cdot x^2$$

o també

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{9,8}{3 \cdot 128}x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{9,8}{384}x^2$$

En el cas que l'objecte sotmès al tir parabòlic es llancés des d'una altura arbitrària y_0 , les equacions s'escriurien de la següent manera

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = y_0 + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = v_0 \sin \alpha - gt \end{cases}$$

El temps de vol el trobarem demanant novament $y = 0$, la diferència amb el cas d'abans és que ara haurem de resoldre una equació de segon grau completa de la que obtindrem dos valors del temps, un positiu t_+ i un negatiu t_- . El temps de vol coincideix amb t_+ . Per calcular l'altura màxima podem seguir explotant la simetria de la paràbola, però ara haurem de fer

$$y_{max} = y\left(\frac{t_+ + t_-}{2}\right)$$

Alternativament, tal com hem vist anteriorment, també podem demanar $v_y = 0$ i fer servir el temps obtingut a l'equació del moviment vertical.

Exemple 2

Es llança un objecte des d'una altura de **20 m** amb velocitat inicial $v = 30 \text{ m/s}$ que forma un angle de **30°** amb l'horitzontal. Es demana trobar: temps de vol, abast màxim, altura màxima i velocitat total **1** segon abans que arribi al terra.

Les equacions del moviment i la velocitat són

$$\begin{cases} x = 30 \cos 30^\circ t \\ y = 20 + 30 \sin 30^\circ t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = 30 \sin 30^\circ - gt \end{cases}$$

que es poden escriure com

$$\begin{cases} x = 25,98t \\ y = 20 + 15t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = 15 - gt \end{cases}$$

Calculem el temps de vol demanant $y = 0$

$$0 = 20 + 15t - \frac{1}{2}gt^2$$

reescrivint l'equació

$$gt^2 - 30t - 40 = 0$$

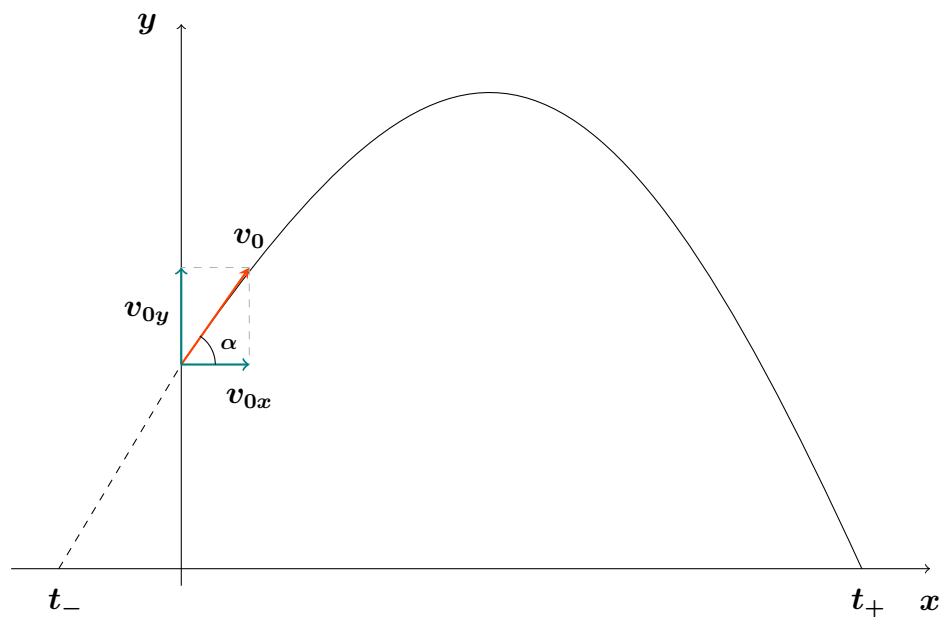
d'on

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 + 4 \cdot g \cdot 40}}{2g}$$

amb solucions $t_+ = 4,065 \text{ s}$ $t_- = -1,004 \text{ s}$. Com hem dit abans, la solució t_+ correspon al temps de vol, i tot seguit podem calcular l'abast màxim

$$x = 25,98 \cdot 4,065 = 105,61 \text{ m}$$

Tal com hem dit abans, per calcular l'altura màxima *no* podem fer servir el temps de vol tal qual dividint per dos com fèiem en el cas que l'objecte es llancés des del terra. Si volem aprofitar la simetria de la paràbola hem de buscar el valor del temps que es troba entre les dues solucions obtingudes.



Aquest valor és

$$\frac{t_+ + t_-}{2} = \frac{4,065 + (-1,004)}{2} = 1,5305 \text{ s}$$

llavors

$$y(1,5305) = 20 + 15 \cdot 1,5305 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (1,5305)^2 = 31,48 \text{ m}$$

També podríem haver demanat $v_y = 0$

$$0 = 15 - gt \rightarrow t = \frac{15}{g} = \frac{15}{9,8} = 1,5306 \text{ s}$$

la discrepància amb el valor obtingut abans es deu a l'arrodoniment. Finalment, com el temps de vol és $t_+ = 4,065 \text{ s}$ un segon abans d'arribar a terra correspon a $t = 3,065 \text{ s}$ i la velocitat total en aquest moment val

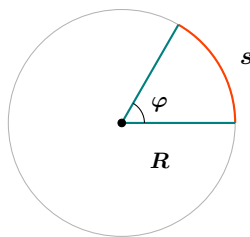
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \\ &= \sqrt{(25,98)^2 + (15 - 9,8 \cdot 3,065)^2} \\ &= 30,02 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Exercicis

1. Supposeu que es llança des d'una altura y_0 un objecte amb una velocitat v_0 i un angle α respecte l'horitzontal. Es demana trobar l'equació de la trajectòria, és a dir, la relació entre y i x en funció de v_0 i α .
2. Es llança un objecte amb velocitat inicial 20 m/s i angle 45° respecte l'horitzontal. Es demana trobar:
 - (a) Temps de vol.
 - (b) Abast màxim.
 - (c) Alçada màxima.
 - (d) Velocitat total un segon abans d'arribar al terra.
 - (e) Equació de la trajectòria.
3. Es dispara un projectil a l'aire des de la part més alta d'un barranc a 200 m d'alçada. La seva velocitat inicial és de 60 m/s i l'angle 60° respecte l'horitzontal. On caurà el projectil?
4. Un noi que està a 4 metres d'una paret vertical tira una pilota contra ella. La pilota surt de la seva mà a dos metres per sobre el terra amb una velocitat inicial $v = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$ i un angle $\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$. Quan la pilota xoca contra la paret, s'inverteix la component horitzontal de la seva velocitat. Calculeu on caurà la pilota.
5. Una pedra llançada horitzontalment des d'una torre xoca amb el terra a una distància de 18 m respecte la seva base. Sabent que l'altura de la torre es de 24 m , trobeu amb quina velocitat es va llançar la pedra i la velocitat que té quan arribi al terra.
6. Un avió que vola a 100 m d'altura amb velocitat 300 m/s deixa caure un paquet, que volem que caigui exactament sobre una camioneta que circula en línia recta per una carretera en sentit contrari amb velocitat 20 m/s . Es demana calcular quina ha de ser la separació inicial dels dos, mesurada al terra, per tal d'aconseguir el nostre propòsit.

3.3 Moviment circular

En aquesta secció estudiarem aquells casos en els que el moviment, o part d'aquest, descriu una circumferència. Sigui doncs una circumferència de radi R i un objecte que es pot moure al llarg d'aquesta. Suposem que aquest objecte s'ha mogut de forma que la seva posició i la d'abans descriuen un angle φ (*en radians*).



La relació que hi ha entre la longitud de l'arc (s) recorregut per l'objecte i aquest angle és:

$$s = \varphi R$$

on R es el radi de la circumferència. La velocitat angular ω es relaciona amb la lineal de forma semblant:

$$v = \omega R$$

i l'acceleració angular α amb la lineal (o tangencial):

$$a_t = \alpha R$$

Els problemes de moviment circular es resolen aplicant les equacions (1), (2) i (3) de la secció 3.1 sense més que fer els canvis de magnituds lineals per angulars, és a dir que quedaran:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \quad (16)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \quad (17)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\varphi - \varphi_0) \quad (18)$$

Una novetat és que al tractar-se d'una trajectòria no rectilínia, apareix una altra component de l'acceleració, que s'anomena acceleració normal o centrípeta, donat que sempre està dirigida cap al centre de la circumferència. El seu mòdul val :

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

i com veiem és sempre diferent de zero si el cos no es troba aturat.

Exemple 1

Sigui un objecte que descriu un moviment circular de radi $R = 2\text{ m}$, suposem que parteix del repòs i es comença a moure amb acceleració $\alpha = \frac{\pi}{3}\text{ rad/s}^2$. Quant valen les velocitats angular i lineal al cap de 5 segons? I l'espai angular i lineal recorregut en aquest temps?

Les equacions del moviment i la velocitat són

$$\begin{cases} \varphi = 0 \cdot t + \frac{1}{2} \frac{\pi}{3} t^2 \\ \omega = 0 + \frac{\pi}{3} t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{1}{2} \frac{\pi}{3} t^2 \\ \omega = \frac{\pi}{3} t \end{cases}$$

de forma que, als 5 segons, les velocitats angular i lineal valen

$$\omega = \frac{\pi}{3} \cdot 5 = \frac{5\pi}{3}\text{ rad/s}; \quad v = \omega R = \frac{5\pi}{3} \cdot 2 = \frac{10\pi}{3}\text{ m/s} = 10,47\text{ m/s}$$

l'espai angular

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} (5)^2 = \frac{25\pi}{6}\text{ rad}$$

i l'espai lineal recorregut

$$s = \varphi R = \frac{25\pi}{6} \cdot 2 = 26,18\text{ m}$$

Exemple 2

Considerem un objecte que descriu un moviment circular de radi $R = 3\text{ m}$ i es mou amb $\omega = 10\pi\text{ rad/s}$. Suposant que frena amb acceleració $\alpha = \pi/2\text{ rad/s}^2$, es demana calcular el temps que tarda a aturar-se, les voltes que ha donat en total i les que dona els darrers quatre segons, així com l'acceleració centrípeta al cap de 2 s de començar a frenar.

Les equacions del moviment i la velocitat són

$$\begin{cases} \varphi = 10\pi t - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} t^2 \\ \omega = 10\pi - \frac{\pi}{2} t \end{cases}$$

quan s'atura és $\omega = 0$, de forma que

$$0 = 10\pi - \frac{\pi}{2} t \rightarrow \frac{\pi}{2} t = 10\pi \rightarrow t = 20\text{ s}$$

llavors, l'espai angular recorregut en aquest temps

$$\varphi = 10\pi \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} (20)^2 = 100\pi \text{ rad}$$

i les voltes es poden calcular com

$$100\pi \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} = 50 \text{ voltes}$$

Quan li falten 4 s per aturar-se l'espai angular recorregut és

$$\varphi = 10\pi \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} (16)^2 = 96\pi \text{ rad}$$

que corresponen a

$$96\pi \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} = 48 \text{ voltes}$$

per tant als darrers 4 s dona $50 - 48 = 2$ voltes. Finalment, per calcular l'acceleració centrípeta demanada farem servir

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

de manera que necessitem calcular abans la velocitat lineal al cap de 2 segons de frenar

$$\omega = 10\pi - \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 9\pi; \quad v = \omega R = 9\pi \cdot 3 = 27\pi = 84,82 \text{ m/s}$$

i

$$a_c = \frac{(84,82)^2}{3} = 2398,31 \text{ m/s}^2$$

Exemple 3

Sigui un objecte que descriu un moviment circular de radi $R = 1 \text{ m}$ i es mou amb velocitat angular 1200 rpm . Sabent que triplica la seva velocitat en 20 s , calculeu les components intrínseques de l'acceleració al principi i al final del procés, així com la total.

Passem primer la velocitat a rad/s

$$1200 \text{ rpm} = 1200 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 40\pi \text{ rad/s}$$



L'acceleració angular (α), que tota l'estona és la mateixa, es pot calcular a partir de

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

d'on

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{3 \cdot 40\pi - 40\pi}{20} = 4\pi \text{ rad/s}^2$$

i l'acceleració tangencial val

$$a = \alpha R \rightarrow a = 4\pi \cdot 1 = 12,57 \text{ m/s}^2$$

L'acceleració centrípeta val, a l'inici

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = (40\pi)^2 \cdot 1 = 15791,4 \text{ m/s}^2$$

de forma que la total serà doncs en aquest moment

$$a_{total} = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{12,57^2 + 15791,4^2} = 15791,4 \text{ m/s}^2$$

Veiem que el valor de l'acceleració centrípeta *domina* sobre el resultat perquè és molt més gran que l'angular.

Quant han passat els **20 s**, l'acceleració tangencial és la mateixa, ja que no depèn del temps, en canvi, l'acceleració centrípeta val ara

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = (120\pi)^2 \cdot 1 = 1,42 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$$

La total serà doncs en aquest moment

$$a_{total} = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{12,57^2 + (1,42 \cdot 10^5)^2} = 1,42 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$$

Exercicis

1. Una partícula descriu un moviment circular de 5 metres de radi amb velocitat constant de 15 m/s. Quan val la seva acceleració?
2. Considerem un objecte que descriu un moviment circular de radi $R = 10 \text{ m}$. Si parteix del repòs i es mou amb acceleració $\alpha = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s}^2$. Es demana calcular les velocitats angular i lineal al cap de 10 segons i l'espai angular i lineal recorregut en aquest temps.
3. Considerem un objecte que descriu un moviment circular de radi $R = 1 \text{ m}$ i es mou amb $\omega_0 = 2\pi \text{ rad/s}$. Suposant que accelera amb $\alpha = \pi \text{ rad/s}^2$, es demana calcular el temps que tarda a fer 100 voltes, així com l'acceleració centrípeta al principi i final del moviment.
4. Considereu un disc de radi $R = 2 \text{ m}$ que, partint del repòs, arriba a una velocitat angular de $\frac{1356}{71} \text{ rpm}$ en 10 s. Es demana calcular les components intrínseques de l'acceleració i l'acceleració total quan porta 8 s en moviment.
5. Un objecte situat a l'equador té una acceleració dirigida cap al centre de la Terra degut a la rotació terrestre i una acceleració dirigida cap al Sol degut al moviment de la Terra en la seva òrbita. Calculeu els mòduls de les dues acceleracions i expresseu-los com fraccions de l'acceleració de la gravetat g .

Dades: Radi de la Terra= 6740 km. Distància Terra-Sol= 150.000.000 km.

4 Dinàmica del punt

4.1 Lleis de Newton

Així com la cinemàtica s'ocupa de l'estudi del moviment dels cossos sense atendre a les causes que l'han produït, la dinàmica estudia precisament aquestes causes que, habitualment, seran forces i la qüestió fonamental serà relacionar aquestes amb el comportament del cossos sobre els quals s'apliquen. El pilar teòric sobre el qual s'edifica la dinàmica són les anomenades Lleis de Newton.

1^a Llei de Newton (Llei d'inèrcia)

Un cos roman en el seu estat inicial de repòs o moviment amb velocitat uniforme a no ser que pateixi l'acció d'una força externa que el desequilibri.

2^a Llei de Newton *L'acceleració d'un cos és inversament proporcional a la seva massa i directament proporcional a la força externa resultant que actua sobre ell.*

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

3^a Llei de Newton (Llei d'acció i reacció)

Les forces sempre es presenten per parells. Si un cos A exerceix una força sobre un cos B, el cos B exercirà una força igual però oposada sobre el cos A.

La formulació de les lleis és aparentment senzilla, però en realitat tenen molt contingut. Per tal d'evitar confusions, comentarem amb un cert detall cadascuna d'elles.

1^a Llei de Newton (comentada) El que ens diu aquesta llei és que si la velocitat d'un cos canvia, necessàriament hi ha alguna força aplicada sobre ell. S'ha de tenir present que la velocitat pot canviar independentment en mòdul, direcció i sentit.

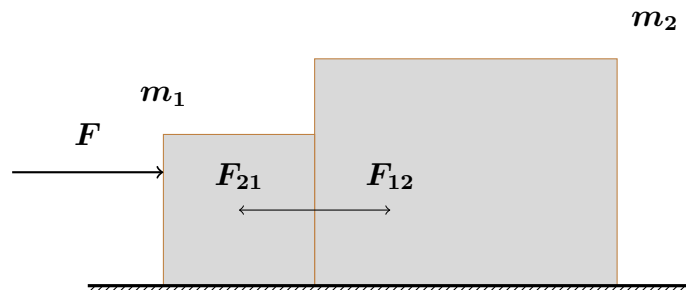
2^a Llei de Newton (comentada) Aquesta llei és la que a la pràctica farem servir, donat que proporciona una relació explícita entre la massa (massa inercial) d'un cos i l'acceleració que adquireix en aplicar-li una força. Cal tenir present, que aquesta força pot ser la resultant (i de fet, sovint serà així) d'un sistema de forces més complex. Al ser les forces objectes vectorials, cal sumar-les com a tals.

3^a Llei de Newton (comentada) Aquesta és potser la que causa més confusions. S'ha de tenir en compte que els parells de forces que esmenta actuen sempre sobre cossos diferents. Per comoditat sovint ignorarem un dels parells de les forces en els problemes, donat que les que ens interessaran són les forces que actuen sobre un cos determinat. S'haurà de tenir molta cura a no considerar parells acció-reacció a forces que no ho són.

Exemple 1

Dos cossos de masses $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 10 \text{ kg}$ es troben en contacte sobre una superfície horitzontal sense fregament. Sobre el cos més lleuger fem una força, paral·lela al pla on es troben, de valor $F = 24 \text{ N}$ de forma que aquest empenyi l'altre. Volem determinar les forces de contacte entre els cossos.

Anomenarem F_{12} la força que fa el cos de massa m_1 sobre l'altre. Llavors, per la tercera llei de Newton, el cos de massa m_2 fa una força sobre l'altre cos amb igual direcció i mòdul però de sentit oposat. Anomenem-la F_{21} .



Aplicuem la segona llei de Newton al conjunt per obtenir,

$$F = (m_1 + m_2)a; \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{24}{12} = 2 \text{ m/s}^2$$

Ara podem aplicar la segona llei de Newton al segon cos

$$F_{12} = m_2 a = 10 \cdot 2 = 20 \text{ N} = F_{21}$$

Alternativament podríem haver aplicat la segona llei de Newton al cos 1 segons

$$F - F_{21} = m_1 a$$

per trobar

$$F_{21} = F - m_1 a = 24 - 2 \cdot 2 = 20 \text{ N} = F_{12}$$

És preferible aplicar el primer mètode, sobretot quan hi ha més de dos cossos en contacte. Si, per exemple en tinguéssim tres, el que faríem és, després de trobar l'acceleració, aplicar la segona llei de Newton al més allunyat de la força externa, després al conjunt d'ell i l'anterior i així de forma recursiva.

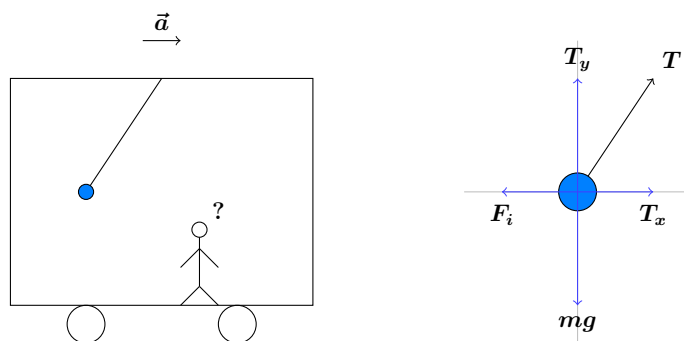
4.2 Forces fictícies

Normalment, per tal d'estudiar el moviment d'un cos, serà convenient referir la seva posició a un sistema de referència. Habitualment, hi ha més d'un possible, i part de la feina al resoldre els exercicis és triar el que sigui més convenient. Sovint n'hi ha algun en el que les equacions del moviment s'escriuen de la forma més simple possible.

Sistemes de referència inercials i no inercials. Direm que un sistema de referència és *inercial* si no està accelerat. Per contra, un sistema de referència és *no inercial* si està accelerat. La característica principal dels sistemes de referència no inercials és que en ells les lleis de Newton aparentment no es compleixen. Per tal que es compleixin, cal introduir en el sistema forces que en realitat no existeixen. Per això, aquestes forces s'anomenen *forces fictícies*. Les forces fictícies són:

Força d'inèrcia Aquesta força apareix, per exemple, quan volen descriure el que succeeix amb un pèndol penjat del sostre d'un vehicle quan aquest accelera. Des de l'interior del cotxe, (que no és un sistema de referència inercial, ja que està accelerat) només podem explicar el fet que el pèndol quedi inclinat amb ajut d'una *força d'inèrcia* que fa que el pèndol es desvii de la vertical.

Sistema no inercial

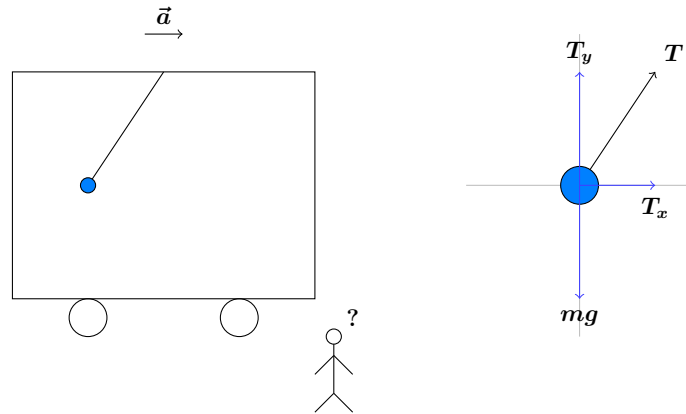


L'observador que es troba dins el vehicle escriuria les següents equacions

$$\begin{cases} T_y = mg \\ T_x = F_i \end{cases}$$

Si descrivim el problema des de fora del cotxe, a terra, quiets, que és un sistema de referència inercial, (això no és del tot cert, ¿per què?), aleshores el que raonem és que en realitat el pèndol s'inclina per proporcionar l'acceleració necessària per seguir al cotxe. No és necessari introduir cap força estranya.

Sistema inercial

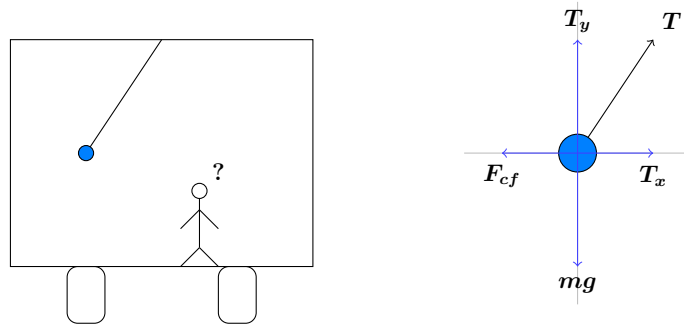


L'observador que es troba a l'exterior del vehicle escriuria les següents equacions

$$\begin{cases} T_y = mg \\ T_x = ma \end{cases}$$

Força centrífuga Aquesta força apareix, per exemple, si volem descriure les sensacions que tenim dins un vehicle quan agafa un revolt. Encara que la seva velocitat sigui constant, com la direcció d'aquesta canvia, necessàriament hi ha d'haver una acceleració (per la primera llei de Newton). Des de dins del vehicle pensem que hi ha una força que ens empeny *cap a fora de la corba*, i l'anomenem força centrífuga. De forma semblant al cas en el que el vehicle accelerava en línia recta, ara un pèndol penjat al sostre es desviarà de la vertical cap a l'exterior de la corba.

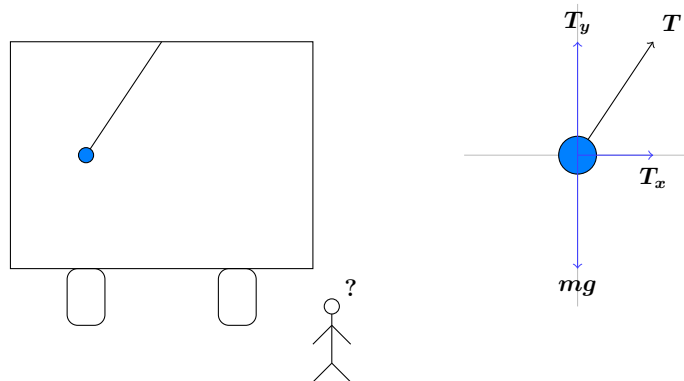
Sistema no inercial



L'observador que es troba a l'interior del vehicle escriuria les següents equacions

$$\begin{cases} T_y = mg \\ T_x = F_{cf} \end{cases}$$

Si ens ho mirem des de l'exterior, el que comprenem és que en realitat hi ha d'haver una força que faci possible que el vehicle descrigui la corba. Normalment aquesta força prové del fregament de les rodes amb el terra, encara que també es pot peraltar la corba, i d'aquesta manera, com veurem més endavant a la secció 4.10, s'aconsegueix que la *normal* la proporcioni. Com aquesta força va dirigida sempre cap el centre de l'arc que descriu el mòbil, s'anomena *força centrípeta*, i aquesta, sí que és real. Tal com vam veure a ??, aquesta força proporciona l'acceleració centrípeta necessària per canviar la direcció de la velocitat.



L'observador que es troba a l'exterior del vehicle escriuria les següents equacions

$$\begin{cases} T_y = mg \\ T_x = ma_c \end{cases}$$

Força de Coriolis Aquesta força fictícia sorgeix en sistemes de referència que giren al voltant d'un eix. Només la comentarem de forma qualitativa.

4.3 La tensió

Convindrem en anomenar *tensió* a qualsevol força que es transmet a través d'un cable o corda. Sovint ignorarem la seva massa i suposarem que són inextensibles.

4.4 Diferència entre massa i pes

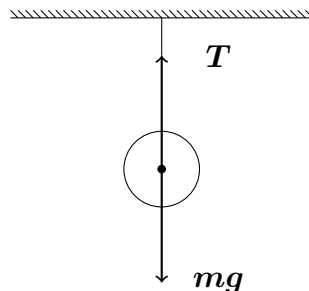
Al llarg de tot el tema de dinàmica hem de tenir en tot moment present que *massa* i *pes* són magnituds diferents. La relació entre elles és la coneguda expressió

$$P = mg$$

on g és el valor de la gravetat (típicament $9,8 \text{ m/s}^2$). La massa és una propietat dels cossos que no depèn del camp gravitatori i que d'alguna manera, mesura la inèrcia d'un cos per ser accelerat. És mesura en **kg**. El pes és la força, (es mesura en **N**), amb que és atreta una determinada massa per un camp gravitatori, per exemple, el terrestre.

Exemple 2

Un llum de massa $m = 2 \text{ kg}$ penja del sostre mitjançant un cable. Calculeu el pes del llum i la tensió del cable.



El pes val

$$P = mg = 2 \cdot 9,8 = 19,6 \text{ N}$$

i la tensió del cable és

$$T = mg = 19,6 \text{ N}$$

ja que el llum està quiet (en el sistema inercial del recinte on es troba penjat).

4.5 La força normal

És habitual tractar situacions en les que un objecte es troba recolzat sobre una superfície o fins i tot sobre un altre objecte en moviment. Si imaginem un objecte de massa m que es troba sobre una taula, hem de pensar que hi ha d'haver alguna força que compensi la de la gravetat, causant del pes ($P = mg$), de l'objecte. Això és conseqüència de la primera llei de Newton, ja que si només hi fos el pes, el cos hauria d'estar movent-se cap avall. Aquesta força (dirigida perpendicularment a la superfície de suport) rep el nom de *força normal*. El primer que hem de notar és que *pes* i *normal* **no** són un parell acció-reacció, i que la *normal* equilibra al *pes* només si el cos no està accelerat.

Exemple 3

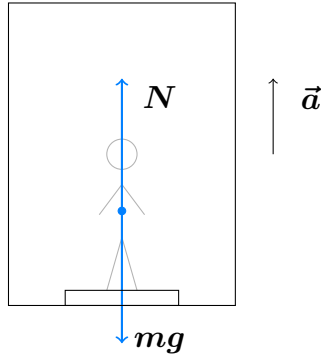
Suposem que dins un ascensor hi ha una persona de massa $m = 75 \text{ kg}$ dalt una balança. Volem conèixer la lectura de la balança en els següents casos:

1. L'ascensor puja amb acceleració $a = 2 \text{ m/s}^2$
2. L'ascensor baixa amb acceleració $a = 3 \text{ m/s}^2$
3. L'ascensor puja amb velocitat constant

Les úniques forces que hi ha aplicades sobre la persona són: el seu pes i la normal que fa la balança sobre ell. Precisament el que mesura la balança és aquesta darrera força (no el pes ni la massa). En cada cas el sentit de l'acceleració ens proporciona un criteri de signes, és a dir les forces que van en el mateix sentit que l'acceleració es consideren positives, i les que van en sentit contrari, negatives. Aquest detall és important i s'aplicarà en tots els exemples i exercicis de dinàmica.

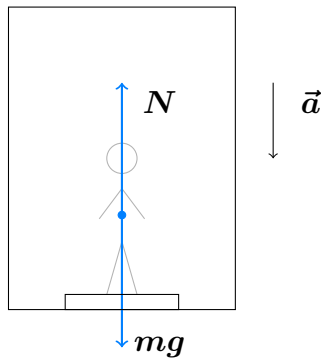
1. Apliquem la segona llei de Newton a la persona per obtenir

$$N - mg = ma; \quad N = ma + mg = 885 \, N$$



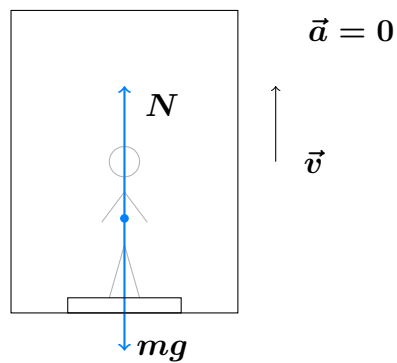
2. De forma semblant a l'apartat anterior

$$mg - N = ma; \quad N = mg - ma = 510 \, N$$



3. Finalment,

$$N - mg = m \cdot 0 \quad N = mg = 75 \cdot 9,8 = 735 \, N$$



4.6 Forces de fregament

Suposem que tenim una taula de fusta i sobre ella tres cossos que tenen la mateixa massa i superfície de contacte amb la taula però estan fets de diferents materials. Suposem que un està fet de goma, un altre de vidre, i l'altre de fusta. Sembla clar que no serà igual de fàcil arrossegar un o altre. Quin creieu que costa més? I quin menys? El que controla aquestes diferències és la força de fregament, que en cada cas tindrà un valor diferent. La força de fregament apareix en intentar moure objectes en contacte. Té un valor màxim, que depèn de la *normal* i d'un coeficient experimental que es representa amb la lletra μ . En general és $0 \leq \mu \leq 1$. Experimentalment es comprova que és

$$F_f = \mu N$$

La força de fregament és pràcticament independent de la superfície en contacte. A més, hem de distingir entre un coeficient de fregament estàtic μ_s , quan encara no hem aconseguit posar en moviment l'objecte, i un dinàmic μ_d , quan ja està en moviment. En general és $\mu_s > \mu_d$, d'acord amb l'experiència habitual de que costa més posar en moviment un objecte, que seguir-lo movent després. La força de fregament sempre s'oposa al sentit del moviment que pretenem imposar als objectes.

Exemple 4

Sigui un objecte de massa $m = 10 \text{ kg}$ que es vol arrossegar empenyent-lo amb una força F . Suposem que el coeficient de fregament estàtic μ_s val $0,9$ i el dinàmic μ_d val $0,5$. Es demana calcular l'acceleració amb que es mou en els següents casos:

1. El cos està quiet i la força aplicada val $F = 87 \text{ N}$
2. El cos està quiet i la força aplicada val $F = 90 \text{ N}$
3. El cos es troba en moviment i la força F baixa de 90 N a 45 N

1. En aquest cas la força de fregament té com a valor (màxim)

$$F_f = \mu_s N = \mu_s mg = 0,9 \cdot 10 \cdot 9,8 = 88,2 \text{ N}$$

Com la força aplicada val $F = 87 \text{ N}$, la de fregament s'adaptarà a aquest valor i el cos no es mourà.

2. La força aplicada $F = 90 \text{ N}$ supera el valor del fregament estàtic i per tant el cos es començarà a moure. Ara bé, en el moment que comença

a moure's la força de fregament canvia (perquè hem de tenir en compte el coeficient de fregament dinàmic) al valor

$$F_f = \mu_d N = \mu_d mg = 0,5 \cdot 10 \cdot 9,8 = 49 \text{ N}$$

i per tant, l'acceleració amb que es mourà es pot calcular com

$$F - F_f = ma \rightarrow a = \frac{F - F_f}{m} = \frac{90 - 49}{10} = 4,1 \text{ m/s}^2$$

3. Si s'està movent i la força baixa a **45 N**, com que el fregament dinàmic és més gran, el cos s'aturarà i immediatament el fregament tornarà a pujar al seu valor estàtic fins a **88,2 N**.

Exercicis introductoris

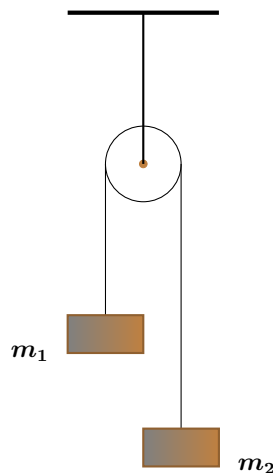
1. Trobeu les forces de contacte de l'*exemple 1* suposant ara que la força s'aplica al cos més massiu. Discutiu el resultat sorprenent.
2. Suposem que s'estiren tres vagons idèntics de massa $m = 100 \text{ kg}$ amb una força de $F = 10000 \text{ N}$. Es demana calcular la força que fan les unions entre el primer i el segon vagó, i entre el segon i el tercer.
3. Siguin tres cossos de masses $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 11 \text{ kg}$ i $m_3 = 12 \text{ kg}$ que es troben en contacte sobre una superfície horitzontal sense fregament. Apliquem sobre el cos 1 una força de 200 N de forma que es mouen tots junts. Es demana trobar les forces de contacte entre tots els cossos.
4. Sobre un cos que té una massa 40 kg i descansa en un pla horitzontal, actua una força horitzontal i constant de 100 N . Quina acceleració té el cos? Quant valdrà la velocitat als 2 s ?
5. Fem una força de 200 N sobre un cos que descansa en un pla horitzontal. El cos assoleix una acceleració constant de 2 m/s^2 . Quant val la massa del cos? Quin desplaçament ha fet el cos en 10 s ?
6. Un cos que està damunt d'una superfície horitzontal i que inicialment està en repòs, recorre 30 m en 20 s . Calculeu la força que ha actuat sobre el cos si aquest té una massa de 80 kg
7. Un cotxe, de massa 1300 kg , va a 72 km/h i s'atura en 60 m . Calculeu la força de frenada, suposada constant, que ha actuat sobre el cotxe.
8. Es fa una força de 150 N sobre un cos de 100 kg de massa. Quina velocitat tindrà al cap de 8 s ? Si al cap de 10 s d'haver iniciat el moviment deixa d'actuar aquesta força, quin desplaçament farà el cos en els 5 s posteriors?
9. Un muntacàrregues de massa 1200 kg puja amb una acceleració constant d' 1 m/s^2 . Quant val la força que fa el cable?

Exercicis introductoris

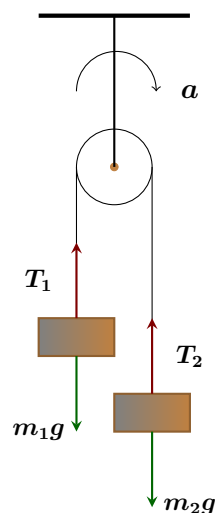
10. Aixequem un cos de **10 kg** de massa mitjançant un fil. Si la tensió de ruptura del fil és de **200 N**, quina és la màxima acceleració amb què es pot aixecar el cos sense que es trenqui el fil?
11. Un bomber de **70 kg** baixa lliscant per un pal. Si la seva acceleració és de **3 m/s²**, quina força vertical fa el pal sobre el bomber?
12. Per tal que una caixa de fusta de **120 kg**, recolzada sobre el terra, comenci a moure's es necessita una força de **500 N**. Calculeu el coeficient estàtic de fricció entre la caixa i el terra.
13. Calculeu el pes d'una caixa sabent que per arrossegar-la per terra s'ha de fer una força de **800 N** i el coeficient estàtic de fricció és **0,8**.
14. Els coeficients estàtic i cinètic de fricció entre un cos i el terra són **0,4** i **0,3** respectivament. La massa de l'objecte és de **60 kg**. Calculeu si amb una força de **300 N** podríem moure'l. En cas afirmatiu, calculeu l'acceleració.
15. Es llança un bloc de gel de **2 kg** sobre una superfície gelada amb una velocitat de **15 m/s** i recorre **97,8 m** abans d'aturar-se. Calculeu el coeficient de fregament i l'acceleració.
16. Arrosseguem un objecte de massa **10 kg** amb una força de **300 N**. Si el coeficient de fregament val $\mu = 0,3$, calculeu la força de fregament i l'acceleració amb que es mou.

4.7 Cossos enllaçats

Un cas inicial senzill per explicar aquesta part del tema és l'anomenada *màquina d'Atwood*, que consisteix en dues masses lligades per una corda que passa per una politja. En tots els casos que segueixen considerarem que les politges no tenen massa ni fregament, i suposarem que les cordes són inextensibles i tampoc tenen massa. Volem trobar l'acceleració del sistema.



Representem les forces que actuen sobre les masses, el seu pes, i la tensió de la corda. Definim un sentit de gir (arbitrari), i llavors podem escriure la segona llei de Newton per cadascuna de les masses.



Amb el criteri de signes donat per l'acceleració, pel cos de l'esquerra tenim

$$T_1 - m_1g = m_1a$$

i pel de la dreta

$$m_2g - T_2 = m_2a$$

Tenint en compte les suposicions que hem fet abans de que la corda no tenia massa i era inextensible, podem suposar que les dues tensions a banda i banda de la politja valen el mateix, per exemple T . Llavors, les equacions anteriors s'escriuen

$$T - m_1g = m_1a; \quad m_2g - T = m_2a$$

i sumant-les obtenim

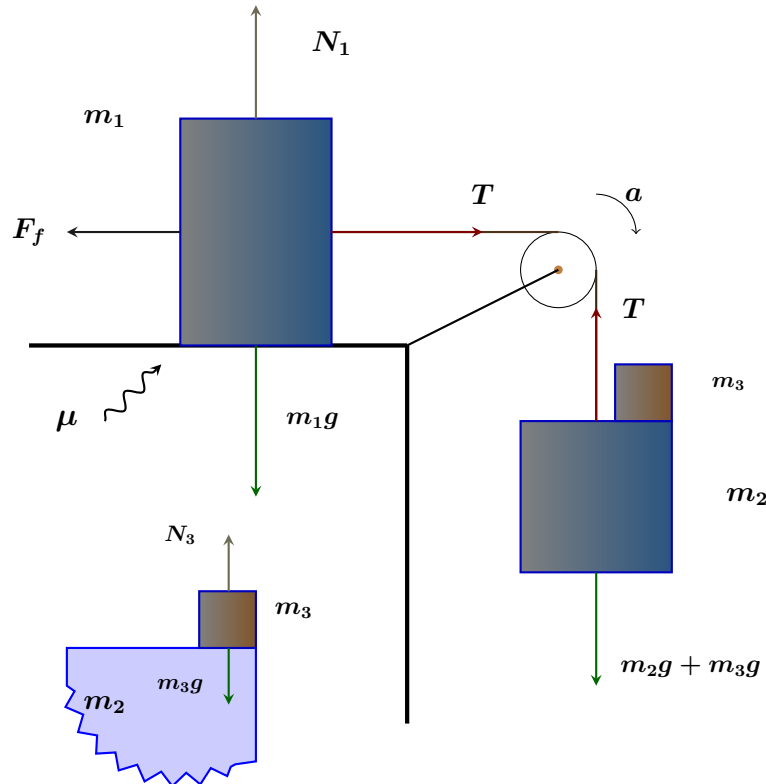
$$m_2g - m_1g = m_1a + m_2a$$

d'on

$$a = \frac{m_2g - m_1g}{m_1 + m_2} = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

Notem que si al posar els valors de les masses el resultat sortís negatiu, interpretarem que el sistema es mou en sentit contrari, amb la mateixa acceleració obtinguda, en valor absolut.

Considerem ara el següent sistema dinàmic, pel qual volem calcular l'acceleració i la força que fa m_2 sobre m_3 .



És fàcil comprovar que en aquest cas el sentit de moviment del sistema no es pot triar ja que ve determinat per la configuració de les masses. Aplicant la segona llei de Newton a m_1 tenim

$$N_1 = m_1 g; \quad T - F_f = m_1 a$$

de forma semblant, aplicant-la ara al conjunt m_2, m_3

$$(m_2 + m_3)g - T = (m_2 + m_3)a$$

Les dues equacions del cos 1 es poden reescriure com una de la forma

$$T - \mu N_1 = m_1 a \Rightarrow T - \mu m_1 g = m_1 a$$

i finalment pel sistema dinàmic hem de resoldre

$$\begin{cases} T - \mu m_1 g = m_1 a \\ (m_2 + m_3)g - T = (m_2 + m_3)a \end{cases}$$

Sumant les equacions tenim

$$(m_2 + m_3)g - \mu m_1 g = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

d'on

$$a = g \frac{m_2 + m_3 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m_3}$$

En quant a m_3 , podem aplicar la segona llei de Newton sobre ell per obtenir

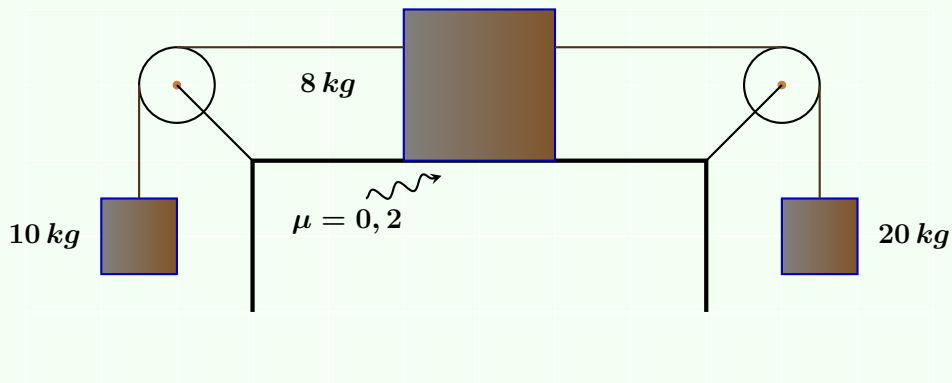
$$m_3 g - N_3 = m_3 a$$

d'on la força (N_3) que fa m_2 sobre ell val

$$\begin{aligned} N_3 &= m_3 g - m_3 a = m_3 g - m_3 g \frac{m_2 + m_3 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m_3} = \\ &= m_3 g \left(1 - \frac{m_2 + m_3 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \right) = m_3 g \frac{m_1(1 + \mu)}{m_1 + m_2 + m_3} \end{aligned}$$

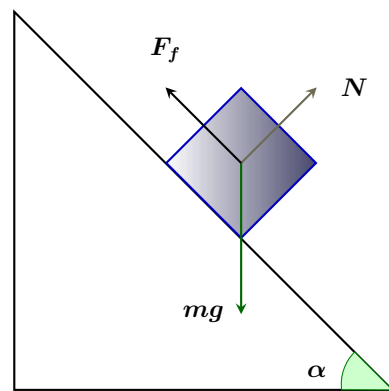
Exercicis

1. Resoleu l'exemple de la màquina d'Atwood prenent els següents valors: $m_1 = 4 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$
2. Resoleu l'altre exemple de la teoria prenent els següents valors: $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$, $m_3 = 1 \text{ kg}$, $\mu = 0,2$
3. Trobeu l'acceleració del següent sistema dinàmic:

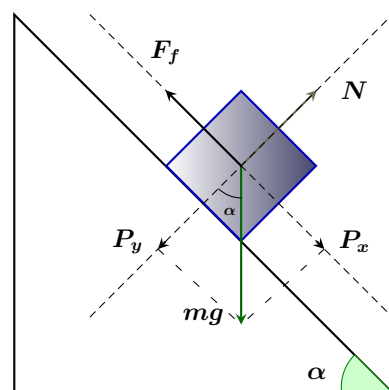


4.8 El pla inclinat

El coneixement del pla inclinat com a sistema dinàmic és fonamental per poder seguir avançant en aquest tema i posteriors. L'estudi que se'n fa depèn d'uns mínims coneixements de trigonometria i de l'aplicació correcta de la segona llei de Newton al conjunt de forces que hi apareixen. En el cas més senzill considerem un objecte de massa m situat sobre un pla inclinat un angle α respecte l'horitzontal. Assumirem que el coeficient de fregament entre el pla i l'objecte val μ .



Per poder resoldre el problema posarem uns eixos coordenats d'acord amb la força normal i la de fregament, de manera que haurem de descomposar la força pes. Llavors podrem aplicar la segona llei de Newton a cada eix independentment.



En l'eix vertical escriurem la condició d'equilibri que correspon a que la força normal equilibra la component vertical del pes

$$N = P_y \Rightarrow N = mg \cos \alpha$$

en l'eix horitzontal, la segona llei de Newton s'escriu

$$P_x - F_f = ma \Rightarrow mg \sin \alpha - \mu N = ma$$

de forma que finalment tenim

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma$$

aquesta expressió no depèn de la massa (suposant que és diferent de zero) i podem escriure

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

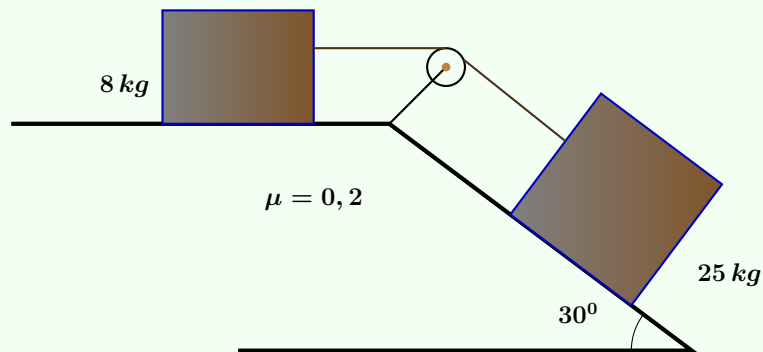
En el cas que no hi hagi fregament n'hi ha prou de fer $\mu = 0$ a l'expressió anterior per obtenir

$$a = g \sin \alpha$$

Als exercicis que trobarem a continuació es combinen plans inclinats amb el que hem vist a l'anterior apartat de cossos enllaçats.

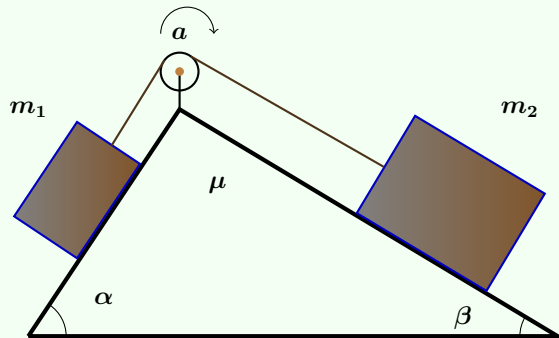
Exercicis

1. Resoleu l'exemple del pla inclinat prenent els següents valors:
 $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0,2$.
2. Treballant de forma algebraica i fent servir els valors numèrics exclusivament al final, trobeu l'acceleració del següent sistema dinàmic:



3. Demostreu que l'acceleració del següent sistema dinàmic ve donada per:

$$a = g \frac{m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha - \mu m_2 \cos \beta - \mu m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2}$$



4.9 Dinàmica del moviment circular

Hem de recordar la part final del capítol de cinemàtica en la qual parlàvem de moviment circular. Allà vam veure que en qualsevol moviment que no fos rectilini hi havia una acceleració centrípeta o normal, de valor

$$a_c = a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

on v és la velocitat lineal de l'objecte que es mou, ω la velocitat angular i R el radi de curvatura, que en principi podria dependre del temps, però que en aquest apartat suposarem constant. És a dir, volem estudiar la dinàmica d'objectes que es mouen descrivint un cercle de radi R . En aquest cas, la segona llei de Newton s'escriu

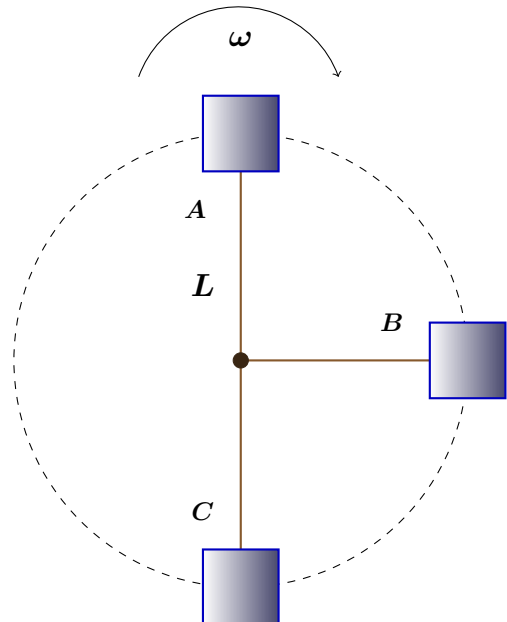
$$\sum F = ma_c$$

Prendrem com a sentit positiu les forces que estiguin dirigides cap el centre de gir, i com a sentit negatiu les que estiguin dirigides “cap enfora”.

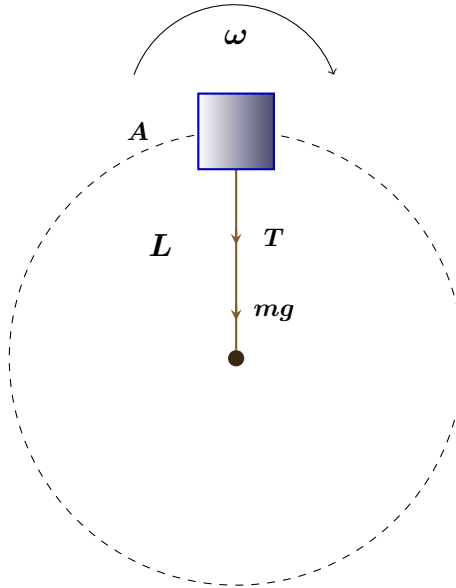
Presentarem un seguit d'exemples per tal de veure com es resolen aquest tipus de problemes.

Exemple 1

Considerem un objecte de massa m que gira en un pla vertical amb velocitat angular ω , lligat a una corda de longitud L . Es vol saber el valor de la tensió de la corda als punt indicats.



En el cas que la massa es troba en el punt **A**, tenim



de forma que la segona llei de Newton $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_c$, s'escriu

$$T + mg = ma_c \Rightarrow T + mg = m\omega^2 L$$

i llavors, la tensió val

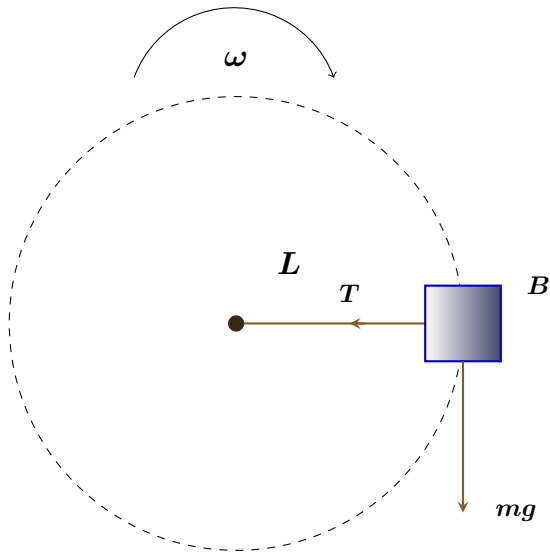
$$T = m\omega^2 L - mg$$

Veiem que, quan la massa es troba dalt de tot, el pes *col·labora* a proporcionar força centrípeta de manera que tenim el valor mínim de la tensió en tot el recorregut circular de la massa.

D'una altra banda, com sabem que és $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{L}$, també podem escriure el resultat per la tensió de la corda en funció de la velocitat lineal, de la següent manera

$$T = m\frac{v^2}{L} - mg$$

En el cas que la massa es troba en el punt **B**, tenim



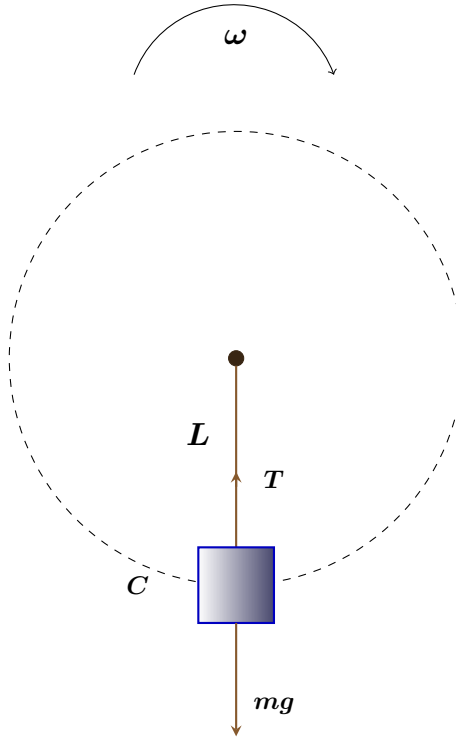
Ara la força pes es tangencial a la trajectòria i per tant, no contribueix a la força centrípeta. Diem que la tensió i el pes estan *desacobrats*. Només la tensió proporciona força centrípeta. Tenim que

$$T = ma_c \Rightarrow T = m\omega^2 L$$

o, en funció de la velocitat lineal de la massa

$$T = m \frac{v^2}{L}$$

En el cas que la massa es troba en el punt C , tenim



Ara, la segona llei de Newton $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_c$, s'escriu

$$T - mg = m\omega^2 L$$

de forma que la tensió de la corda val ara

$$T = mg + m\omega^2 L$$

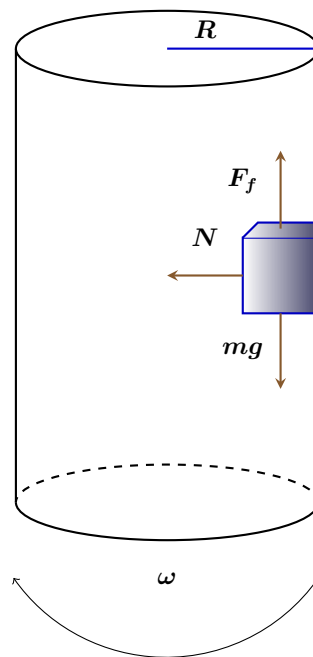
o en funció de la velocitat lineal

$$T = mg + m\frac{v^2}{L}$$

Es comprova que és el valor màxim de la tensió al llarg del recorregut circular de la massa.

Exemple 2

Considerem ara un objecte situat a la part interior d'un cilindre amb fregament, de radi R que gira amb velocitat angular ω . Volem calcular la velocitat angular mínima per tal que l'objecte es mantingui sense caure.



Podem veure que al estar enganxat a la paret apareix una força de fregament cap a dalt en sentit contrari al pes, i la força N , que fa la paret sobre l'objecte, és la que proporciona l'acceleració centrípeta (recordeu que la centrífuga és una força fictícia).

Llavors, aplicant la segona llei de Newton als eixos horitzontal i vertical, tenim

$$N = m\omega^2 R; \quad F_f = mg$$

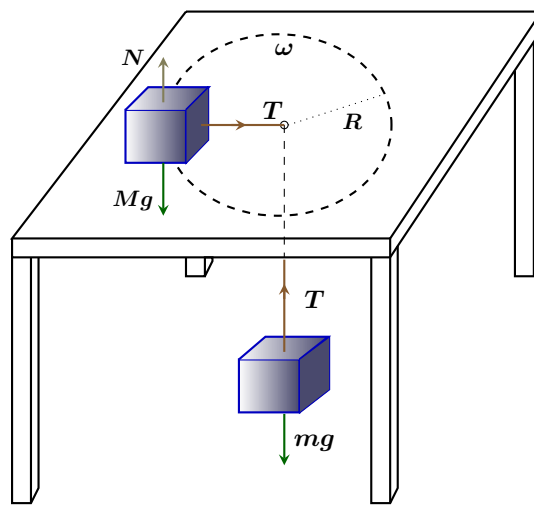
d'on

$$\mu N = mg \Rightarrow \mu m\omega^2 R = mg \Rightarrow \mu\omega^2 R = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}$$

i veiem que no depèn de la massa de l'objecte que es troba dins el cilindre.

Exemple 3

Una massa M col·locada sobre una taula sense fregament, està unida a una massa m penjada mitjançant una corda que passa per un forat practicat a la taula. El cos de massa m està en repòs mentre que el cos de massa M descriu un moviment circular uniforme de radi R . Volem calcular la velocitat ω amb que es mou M .



Per la massa M podem escriure

$$N = Mg; \quad T = M\omega^2 R$$

i per la massa m

$$T = mg$$

d'on

$$mg = M\omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mg}{MR}}$$

Es veu fàcilment que l'equació $N = Mg$ no s'ha utilitzat perquè no hi ha fregament.

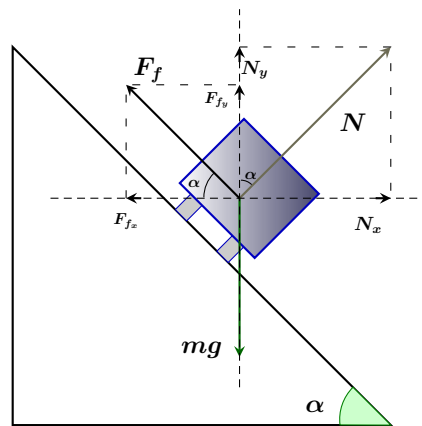
Exercicis

1. Resoleu l'exemple 1, prenent els següents valors: $m = 5\text{ kg}$, $L = 2\text{ m}$, $\omega = \frac{20\pi}{3}\text{ rad/s}$.
2. Resoleu l'exemple 2, prenent els valors: $R = 2\text{ m}$, $\mu = 0,3$.
3. Resoleu l'exemple 3, prenent els següents valors: $M = 10\text{ kg}$, $m = 15\text{ kg}$, $R = 1\text{ m}$.
4. Un cotxe circula per una corba de radi $R = 25\text{ m}$. Si el fregament amb la carretera val $\mu = 0,3$, calculeu la velocitat màxima a que pot circular per tal de no sortir de la carretera.
5. Un cos de 500 g lligat a una corda de $0,5\text{ m}$ de longitud dóna voltes amb velocitat constant en un pla horitzontal. El sistema forma un pèndol cònic d'angle constant de 60° amb la vertical. Calculeu:
 - (a) La tensió de la corda.
 - (b) La velocitat lineal del cos.
 - (c) L'angle que formen el vector velocitat i el vector acceleració.
6. Un avió vola a una velocitat de mòdul 400 m/s , constant i descriu un cercle en un pla horitzontal. Els límits de seguretat pel pilot permeten experimentar com a màxim una acceleració que és vuit vegades la de la gravetat. En aquestes condicions extremes, calculeu:
 - (a) El radi de la trajectòria circular.
 - (b) L'angle d'inclinació de les ales de l'avió respecte de l'horitzontal perquè la força de sustentació (perpendicular al pla definit per les ales) li permeti fer aquest gir.

4.10 La corba peraltada

El propòsit d'aquesta secció és discutir el cas que un vehicle descriu una corba de radi R que està peraltada un cert angle α . Suposarem que el fregament amb el terra és μ . Com veurem, la idea de peraltar una corba és aprofitar la força normal que pateix el vehicle per contribuir a la força centrípeta i d'aquesta manera, descriure la trajectòria amb més seguretat. Hem de distingir dos casos, segons el vehicle circuli amb la *velocitat mínima* o *velocitat màxima*.

Velocitat mínima



En aquest cas de velocitat mínima, el vehicle té tendència a caure de costat cap a dins de la corba, llavors la força de fregament va dirigida cap a dalt. A l'eix horitzontal i vertical tenim

$$\begin{cases} N_x - F_{fx} = m \frac{v_{min}^2}{R} \\ N_y + F_{fy} = mg \end{cases}$$

incorporant l'angle α

$$\begin{cases} N \sin \alpha - F_f \cos \alpha = m \frac{v_{min}^2}{R} \\ N \cos \alpha + F_f \sin \alpha = mg \end{cases}$$

ara, com és $F_f = \mu N$,

$$\begin{cases} N \sin \alpha - \mu N \cos \alpha = m \frac{v_{min}^2}{R} \\ N \cos \alpha + \mu N \sin \alpha = mg \end{cases}$$

traiem factor comú

$$\begin{cases} N(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = m \frac{v_{min}^2}{R} \\ N(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = mg \end{cases}$$

i dividint les equacions,

$$\frac{N(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{N(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} = \frac{m \frac{v_{min}^2}{R}}{mg}$$

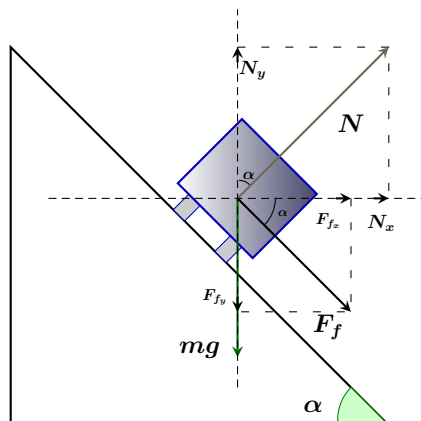
que es pot escriure com

$$\frac{v_{min}^2}{Rg} = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

i finalment

$$v_{min} = \sqrt{Rg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}}$$

Velocitat màxima



Ara la tendència del vehicle és relliscar de costat cap amunt, i les equacions són

$$\begin{cases} N_x + F_{fx} = m \frac{v_{max}^2}{R} \\ N_y = F_{fy} + mg \end{cases}$$

de manera que tenim

$$\begin{cases} N \sin \alpha + \mu N \cos \alpha = m \frac{v_{max}^2}{R} \\ N \cos \alpha = \mu N \sin \alpha + mg \end{cases}$$

reordenant la segona equació i traient factor comú

$$\begin{cases} N(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = m \frac{v_{max}^2}{R} \\ N(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = mg \end{cases}$$

ara dividim les equacions,

$$\frac{N(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{N(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)} = \frac{m \frac{v_{max}^2}{R}}{mg}$$

que podem escriure com

$$\frac{v_{max}^2}{Rg} = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

i, finalment

$$v_{max} = \sqrt{Rg \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}}$$

Exercicis

1. Interpreteu els casos particulars de les velocitats màxima i mínima per $\alpha = 0^\circ$ i per $\alpha = 90^\circ$.
2. Trobeu el rang de velocitats amb què un vehicle pot descriure una corba peraltada un angle $\alpha = 30^\circ$, de radi $R = 25 \text{ m}$ si el fregament amb el terra val $\mu = 0, 2$.
3. Raoneu què succeeix amb les velocitats màxima i mínima quan és $\mu = 0$.

5 Treball i energia

5.1 Definició de treball

El treball (W) que fa una força F constant aplicada sobre un cos quan aquest recorre una distància x es calcula com:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x}$$

o també

$$W = |\vec{F}| |\vec{x}| \cos \theta$$

on θ és l'angle que formen la força i la direcció (amb sentit) del moviment del cos. El treball, en el sistema internacional es mesura en Joule (J).

5.1.1 Forces conservatives

Diem que una força es conservativa si el treball total que realitza sobre una partícula és zero quan la partícula recorre una trajectòria tancada i torna a la seva posició inicial. Per exemple, la força gravitatòria té aquesta propietat, ja que per exemple, per elevar un cos de massa m una certa alçada h cal fer una força igual al seu pes (mg), i com la distància recorreguda és h , el treball realitzat sobre el cos és

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{x}| \cos \theta = Fx \cos 0^\circ = mgh$$

i si es deixa anar el cos, aquest “torna” el treball que s’havia fet sobre ell. Una altra forma equivalent de descriure una força conservativa és dient que el treball realitzat per una força conservativa és independent de la forma en que la partícula es mou d’un punt a l’altre. Reprenent l’exemple d’abans, és fàcil veure que es faria el mateix treball si pugéssim el cos per un pla inclinat (sense fregament). Una forma d’interpretar les forces conservatives es pensar que d’alguna forma el treball fet sobre un cos “es guarda o conserva en aquest” i per tant, més endavant estarà a disposició. A cada força conservativa se li pot associar una energia potencial. D’aquesta manera, a la força gravitatòria se li associa l’energia potencial gravitatòria mgh .

5.1.2 Forces no conservatives

Les forces no conservatives són les que no tenen les propietats abans esmentades. Per exemple, la força de fregament, és no conservativa. Si movem un cos al llarg d’una distància determinada sobre una superfície amb fregament, fem un treball donat pel producte de la força de fregament que hem de vèncer

i la distància recorreguda. Si ara tornem el cos enrere, la força de fregament canvia de sentit, (sempre s'oposa al sentit del moviment), i hem de fer més treball. Les forces no conservatives no “guarden” el treball fet sobre el cos, normalment aquest es perd en forma de calor.

5.2 Energia cinètica i potencial

L'energia cinètica d'un cos de massa m que es mou amb velocitat v és:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

i com veiem és sempre una quantitat no negativa.

L'energia potencial gravitatòria d'un cos que es troba a prop de la superfície terrestre és:

$$E_{pg} = mgh$$

On h és l'alçada del cos mesurada desde un cert sistema de referència. La importància d'aquestes quantitats és que si definim l'energia mecànica d'un cos com:

$$E_M = E_c + E_{pg}$$

aleshores, si totes les forces que actuen sobre un cos són conservatives, l'energia mecànica es conserva. Aquest resultat es demostra fent servir el teorema següent.

5.3 Teorema (de les forces vives)

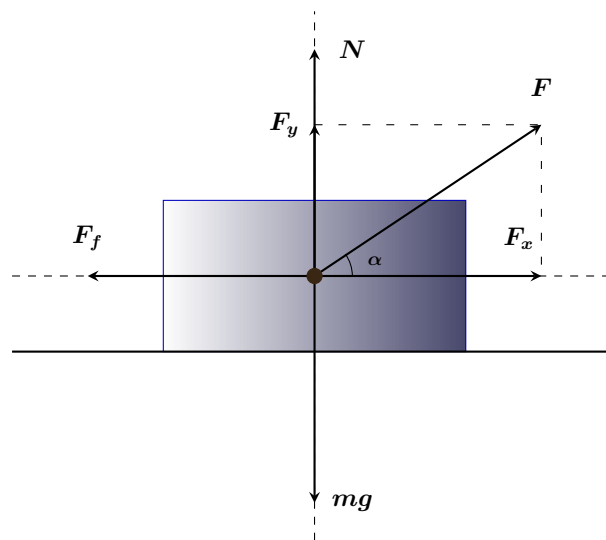
Un resultat fonamental que agrupa totes les definicions que hem vist abans és

$$W_{net} = \Delta E_c$$

que ens diu que el treball net fet (per forces conservatives i no conservatives) sobre una partícula s'inverteix en variar l'energia cinètica d'aquesta partícula. És important adonar-se que una possible variació de l'energia potencial gravitatòria del cos, ja està inclosa en el terme de treball fet per les forces conservatives. En la pràctica, el que farem és un balanç d'energia, tenint en compte que hi poden haver forces no conservatives que *s'emportin* treball W_{nc} . Del que s'ha vist és evident que les unitats de l'energia en el sistema internacional són també Joule (J). De fet, podem pensar en treball i energia com les dues cares d'una mateixa moneda.

Exemple 1

Estirem un objecte de massa $m = 10 \text{ kg}$ que es trobava en repòs, amb una força $F = 80 \text{ N}$ que forma un angle $\alpha = 30^\circ$ amb l'horitzontal al llarg d'una distància $d = 10 \text{ m}$ sobre una superfície que té un coeficient de fregament $\mu = 0,2$. Es demana calcular l'acceleració amb què es mou, la velocitat final, la força normal que pateix el cos i el treball que fa cada força que actua sobre el cos.



Descomponent la força F tenim, per cada eix coordenat

$$\begin{cases} N + F_y = mg \\ F_x - F_f = ma \end{cases}$$

i escrivint les components en funció de l'angle α

$$\begin{cases} N + F \sin \alpha = mg \\ F \cos \alpha - \mu N = ma \end{cases}$$

Llavors, la força normal val

$$N = mg - F \sin \alpha = 10 \cdot 9,8 - 80 \sin 30^\circ = 58 \text{ N}$$

i finalment

$$F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha) = ma$$

d'on

$$a = \frac{F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)}{m} = 5,97 \text{ m/s}^2$$

La velocitat final es pot calcular amb ajut de l'expressió

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

llavors

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2ax} = \sqrt{0 + 2 \cdot 5,97 \cdot 10} = 10,93 \text{ m/s}$$

I en quant al treball que fa cada força (en cada cas hem de posar *l'angle* que fa la força amb *el sentit* del moviment)

$$\left\{ \begin{array}{l} W_N = (mg - F \sin \alpha)d \cos 90^\circ = 0 \\ W_{F_f} = \mu N d \cos 180^\circ = 0,2 \cdot 58 \cdot 10(-1) = -116 \text{ J}^* \\ W_{F_x} = F_x d \cos 0^\circ = F \cos \alpha \cdot d \cos 0^\circ = 80 \cos 30^\circ \cdot 10 \cos 0^\circ = 712,8 \text{ J} \\ W_{F_y} = F_y d \cos 90^\circ = 0 \\ W_{mg} = mgd \cos 270^\circ = 0 \end{array} \right.$$

Ara podem comprovar que el teorema del treball-energia cinètica és compleix

$$W_{net} = 712,8 - 116 = 596,8 \text{ J}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}10 \cdot 10,93^2 = 597,3 \text{ J}$$

Dins el marge d'error degut a les aproximacions fetes, els resultats coincideixen.

*En general considerarem aquest treball amb signe positiu i l'incorporarem a un balanç d'energia.

5.4 Potència

El treball realitzat per una força en la unitat de temps és la *potència* P de la força:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fd}{t} = Fv$$

i en el sistema internacional es mesura en Watts (W).

Exemple 2

Un objecte es troba caient amb velocitat $v = 3 \text{ m/s}$ quan es troba a una altura $h = 10 \text{ m}$. Es demana calcular la velocitat v' amb que arriba al terra suposant que no hi ha fregament amb l'aire.

Plantegem un balanç d'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv'^2$$

d'on

$$v' = \sqrt{v^2 + 2gh} = \sqrt{3^2 + 2 \cdot 9,8 \cdot 10} = 14,32 \text{ m/s}$$

Exemple 3

Es projecta un bloc al llarg d'una superfície horitzontal amb velocitat inicial $v_0 = 10 \text{ m/s}$. El coeficient de fregament entre el bloc i la superfície és $\mu = 0,2$. Quina distància recorre el bloc abans de quedar aturat?

L'energia cinètica del bloc se l'endú el fregament íntegrament. Llavors

$$\frac{1}{2}mv^2 = W_{F_{nc}} = F_f d = \mu N d = \mu mg d$$

d'on

$$d = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{10^2}{2 \cdot 0,2 \cdot 9,8} = 25,51 \text{ m}$$

Exemple 4

Un objecte de massa m situat a altura h_1 sobre un pla inclinat sense fregament, angle α i longitud l , rellisca al llarg del pla fins arribar a una superfície horitzontal que presenta coeficient de fregament μ . Després de recórrer una distància d pel pla horitzontal puja per un altre pla inclinat (amb fregament μ' i angle β). Es demana calcular la distància l' que recorre l'objecte al llarg d'aquest segon pla inclinat, en funció de les variables presents al problema.

El balanç d'energia que podem plantejar és, primer l'energia potencial gravitatòria de l'objecte s'inverteix en cinètica al arribar al final del primer pla inclinat

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow mgl \sin \alpha = \frac{1}{2}mv_1^2$$

després, aquesta energia cinètica s'inverteix en fregament al llarg del pla horitzontal i la que li queda, per pujar al segon pla inclinat,

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = W_{F_{nc}} + \frac{1}{2}mv_2^2 = \mu mgd + \frac{1}{2}mv_2^2$$

finalment, l'energia cinètica que li queda s'inverteix en potencial gravitatòria i fregament al pujar per el segon pla inclinat,

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = W_{F_{nc}} + mgh_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 = \mu' mg \cos \beta \cdot l' + mgl' \sin \beta$$

enllaçant principi i final,

$$\begin{aligned} \mu' mg \cos \beta \cdot l' + mgl' \sin \beta &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_1^2 - \mu mgd \\ &= mgl \sin \alpha - \mu mgd \end{aligned}$$

d'on finalment,

$$l' = \frac{mgl \sin \alpha - \mu mgd}{\mu' mg \cos \beta + mg \sin \beta} = \frac{l \sin \alpha - \mu d}{\mu' \cos \beta + \sin \beta}$$

Exercicis

En tots els exercicis cal treballar algebraicament i només usar els valors numèrics proporcionats al final del càlcul.

1. Calculeu l'alçada màxima a la que arriba un objecte llançat cap amunt amb una velocitat $v_0 = 10 \text{ m/s}$.
2. Un nen de massa $m = 30 \text{ kg}$ es deixa caure per un tobogan de d'altura $h = 2 \text{ m}$ i arriba a terra amb una velocitat $v = 4 \text{ m/s}$. Es demana calcular el treball que s'ha endut el fregament.
3. Una massa $m = 500 \text{ g}$ unida a un fil lleuger i inextensible gira en un pla vertical descrivint una circumferència de radi $R = 0,5 \text{ m}$. La velocitat de la massa quan el fil està en posició horitzontal és $v = 6 \text{ m/s}$. Es demana calcular la velocitat i la tensió al punt més baix del moviment.
4. Volem pujar un ascensor de massa $m = 700 \text{ kg}$ fins a una alçada $h = 20 \text{ m}$. Calculeu el treball que cal fer i la potència desenvolupada si el recorregut s'ha fet en $t = 28 \text{ s}$.
5. Un cotxe de massa $m = 800 \text{ kg}$ arrenca des del repòs i assoleix una velocitat $v = 107 \text{ km/h}$ en un temps $t = 8 \text{ s}$. Determineu el treball i la potència mitjana desenvolupats pel motor.

Exercicis

6. Un objecte cau des d'un terrat. Quan li falten $h = 16,25 \text{ m}$ per arribar a terra la seva velocitat és $v = 30 \text{ m/s}$. Es demana calcular amb quina velocitat arribarà al terra i des de quina alçada H es va llançar.
7. Considereu una màquina d'Atwood amb masses $m_1 = 15 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$. Es demana trobar la velocitat de m_1 quan el sistema es deixa moure lliurement i ha recorregut $h = 15 \text{ m}$.
8. Llancem verticalment cap amunt una pilota de massa m amb velocitat v_0 . Si suposem que l'aire fa una força constant F_a , trobeu l'altura assolida per la pilota en funció de v_0 , m , F_a i g . Trobeu després, la velocitat amb que torna al terra en funció de les mateixes variables.
9. Un cos de massa $m = 5 \text{ kg}$ es llança cap amunt per un pla inclinat un angle $\alpha = 30^\circ$ amb una velocitat $v_0 = 15 \text{ m/s}$. Calculeu quina distància recorre fins aturar-se suposant que el fregament val $\mu = 0,1$.
10. Estem dissenyant una muntanya russa i volem que les vagonetes, de massa $m = 80 \text{ kg}$, facin una volta vertical completa de radi $R = 10 \text{ m}$. Suposant que no hi ha pèrdues per fregament, calculeu des de quina altura cal deixar anar les vagonetes per tal que passin el *loop*. Calculeu la força que fa el rail sobre la vagoneta al tornar al punt més baix.

5.5 El moment lineal. Xocs

El moment lineal o *quantitat de moviment* d'un cos que té massa m i es mou amb velocitat v es defineix com $\vec{p} = m\vec{v}$. Com que en aquest curs només tractarem problemes unidimensionals, el caràcter vectorial de la quantitat de moviment quedarà reduït a un signe, definit a partir d'algun criteri. De la segona llei de Newton (en forma diferencial), es dedueix directament que, en absència de forces externes, el moment lineal és una quantitat conservada. Aquest resultat és molt útil en multitud de situacions. Per exemple, en un xoc de partícules, totes les forces són internes, de manera que es pot aplicar aquesta llei de conservació. El mateix succeeix en una explosió, o també en un avió a reacció, un coet, etc. Quan tinguem un conjunt de cossos, el moment lineal del conjunt es calcula sumant els moments lineals de cadascun d'ells. Si l'energia cinètica no es conserva direm que el xoc és *inelàstic*. En aquestes condicions els cossos patiran deformacions que poden ser permanents. Si els dos cossos queden units després del xoc, direm que aquest és *totalment inelàstic*.

Exemple 1

Un cos amb massa $m_1 = 8 \text{ kg}$ té una velocitat $v_1 = 10 \text{ m/s}$ i xoca frontalment amb un objecte de massa $m_2 = 12 \text{ kg}$ que es troba aturat. Si el xoc és totalment inelàstic, calculeu la velocitat del conjunt després del xoc i l'energia perduda en el procés.

La conservació de la quantitat de moviment abans i després del xoc permet escriure

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

com el xoc és totalment inelàstic tenim que $v'_1 = v'_2 = v'$, ja que els dos cossos queden junts després del xoc. Llavors

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v' + m_2 v'$$

d'on

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{8 \cdot 10 + 12 \cdot 0}{8 + 12} = \frac{80}{20} = 4 \text{ m/s}$$

En quant a la pèrdua d'energia, podem trobar-la calculant l'energia cinètica *del sistema* abans ($E_{inicial}$) i després (E_{final}) del xoc, i restant

$$E_{perduda} = E_{inicial} - E_{final}$$

$$E_{inicial} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}8 \cdot 10^2 + \frac{1}{2}12 \cdot 0^2 = \frac{1}{2}8 \cdot 10^2 = 400 \text{ J}$$

$$E_{final} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = \frac{1}{2}(8 + 12)4^2 = 160 \text{ J}$$

llavors

$$E_{perduda} = 400 - 160 = 240 \text{ J}$$

Si volem saber el *percentatge* d'energia perduda, calcularem

$$\%E_{perduda} = \frac{E_{perduda}}{E_{inicial}} \cdot 100 = \frac{240}{400} \cdot 100 = 60\%$$

Exemple 2

En un xoc unidimensional, una bola de massa $m_1 = 5 \text{ kg}$ es dirigeix cap a la dreta a una velocitat $v_1 = 7 \text{ m/s}$ i col·lisiona contra una altra bola de massa $m_2 = 8 \text{ kg}$ que inicialment està en repòs. Després del xoc, la bola de 5 kg va cap a l'esquerra a una velocitat $v'_1 = 1 \text{ m/s}$ i la bola de 8 kg va cap a la dreta a una velocitat $v'_2 = 5 \text{ m/s}$. Es demana:

1. Esbrineu si el xoc és elàstic o inelàstic.
2. Comproveu si es conserva la quantitat de moviment.

Suposarem que els cossos que es mouen cap a la dreta tenen velocitat *positiva* i els que es mouen cap a l'esquerra *negativa*. Per tal de veure si el xoc és elàstic calculem l'energia cinètica del sistema abans i després del xoc,

$$E_{inicial} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7^2 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0^2 = 122,5 \text{ J}$$

$$E_{final} = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5^2 = 102,5 \text{ J}$$

es veu que el xoc **no** és elàstic, ja que s'ha perdut energia.

Comprovem ara si es conserva la quantitat de moviment (ho hauria de fer!)

$$m_1v_1 + m_2v_2 \stackrel{?}{=} m_1v'_1 + m_2v'_2$$

$$5 \cdot 7 + 8 \cdot 0 \stackrel{?}{=} 5 \cdot (-1) + 8 \cdot 5$$

$$35 = 35$$

de forma que es comprova que es conserva la quantitat de moviment.

5.5.1 Coeficient de restitució

Si l'energia cinètica es conserva, direm que el xoc és *elàstic*. Existeix una quantitat molt important que s'anomena *coeficient de restitució*, que codifica el *grau d'elasticitat* del xoc. Veiem com obtenir-la.

Suposem que tenim dues masses m_1 , m_2 que patiran un xoc elàstic. Aleshores, de la conservació del moment lineal i l'energia cinètica, podem escriure:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \end{cases}$$

ara, traient denominadors i reordenant a cada equació:

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_1 v'_1 = m_2 v'_2 - m_2 v_2 \\ m_1 v_1^2 - m_1 v'^2_1 = m_2 v'^2_2 - m_2 v_2^2 \end{cases}$$

traient factor comú:

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2) \\ m_1 (v_1^2 - v'^2_1) = m_2 (v'^2_2 - v_2^2) \end{cases}$$

fent servir que suma per diferència és diferència de quadrats:

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2) \\ m_1 (v_1 + v'_1)(v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 + v_2)(v'_2 - v_2) \end{cases}$$

Fent servir la primera equació en la segona:

$$m_1 (v_1 + v'_1) \frac{m_2}{m_1} (v'_2 - v_2) = m_2 (v'_2 + v_2)(v'_2 - v_2)$$

on, suposant que les masses són diferents de zero i $v'_2 \neq v_2$, tenim:

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2$$

o també:

$$v_1 - v_2 = v'_2 - v'_1$$

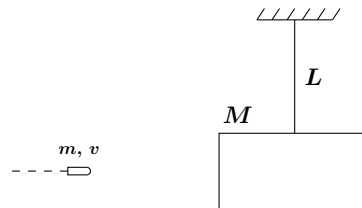
Aquesta expressió només es compleix si es conserva l'energia cinètica, però podem generalitzar-la i definir el *coeficient de restitució*, e com:

$$e = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2}$$

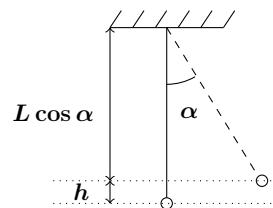
Fixem-nos en que per un xoc elàstic serà $e = 1$, per un inelàstic $0 < e < 1$, i per un totalment inelàstic $e = 0$.

5.5.2 El pèndol balístic

El pèndol balístic és un dispositiu que es fa servir per mesurar la velocitat de projectils. La idea és disparar un projectil sobre un bloc, per exemple de fusta, suspès a l'aire. A partir de l'angle que es desvia de la vertical el conjunt després de l'impacte, es pot calcular la velocitat original del projectil.



Un cop ha impactat el projectil contra el bloc, i suposant que queda incrustat en ell, el conjunt descriurà un arc elevant-se una certa altura h . Per major claredat hem representat aquesta situació de forma simplificada.



Per resoldre el problema plantegem primer la conservació de la quantitat de moviment, ja que al tractar-se d'un xoc, totes les forces són internes.

$$mv + M \cdot 0 = (m + M)v'$$

El bloc es troba inicialment en repòs i el conjunt es començarà a moure amb velocitat v' . De moment tenim,

$$v = \frac{m + M}{m}v'$$

Ara, fem un balanç d'energia amb la cinètica que té el conjunt i la potencial gravitatòria que tingui quan arribi a l'altura màxima al descriure l'arc

$$\frac{1}{2}(m + M)v'^2 = (m + M)gh$$

de forma que

$$v' = \sqrt{2gh}$$

Per una altra banda, la relació entre l'altura assolida, la longitud de la corda que lliga el bloc i l'angle α que forma la corda amb la vertical és

$$h = L - L \cos \alpha = L(1 - \cos \alpha)$$

d'on finalment, la velocitat del projectil val

$$v = \frac{m + M}{m} v' = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh} = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)}$$

Exercicis. *En tots els exercicis cal treballar algebraicament i només usar els valors numèrics proporcionats al final del càlcul.*

1. Un patinador de massa $m_1 = 45 \text{ kg}$ que es troba en repòs al mig d'una pista de gel llança una pilota de massa $m_2 = 3 \text{ kg}$ amb una velocitat $v_2 = 6 \text{ m/s}$. Quina velocitat tindrà el patinador immediatament després del llançament?
2. Un cos es mou amb una velocitat $v_1 = 5 \text{ m/s}$. Si de cop es trenca en dues parts iguals de manera que una d'elles es mou amb una velocitat $v'_1 = 2 \text{ m/s}$ en la mateixa direcció i sentit que el cos original, quina serà la velocitat (en mòdul, direcció i sentit) de l'altra part?
3. Dos patinadors, **A** i **B**, amb la mateixa massa, $m = 40 \text{ kg}$, es troben en repòs sobre una pista horitzontal sense fregament apreciable. El patinador **A** llança amb una velocitat horitzontal $v = 2 \text{ m/s}$ una bola de massa $m = 6 \text{ kg}$ que recull el patinador **B**. Trobeu la velocitat final de cada patinador.
4. Dues partícules de massa $m_1 = 4 \text{ kg}$ i $m_2 = 6 \text{ kg}$ que van en sentits contraris xoquen frontalment amb velocitats $v_1 = 8 \text{ m/s}$ i $v_2 = 12 \text{ m/s}$ respectivament, i reboten de manera perfectament elàstica. Es demana calcular les velocitats després del xoc.
5. Una bola d'acer xoca elàsticament contra un bloc de massa $m_2 = 1 \text{ kg}$ inicialment en repòs sobre una superfície plana horitzontal. En el moment del xoc la bola té una velocitat horitzontal $v_1 = 5 \text{ m/s}$. El coeficient de fricció dinàmic entre la superfície i el bloc té un valor $\mu = 0,2$. Com a conseqüència del xoc, el bloc recorre una distància $d = 2 \text{ m}$ abans d'aturar-se. Es demana:
 - (a) La velocitat del bloc just després del xoc.
 - (b) La massa m_1 de la bola d'acer.
 - (c) L'energia cinètica perduda pel bloc en el xoc elàstic.
6. Es dispara sobre un pèndol balístic de massa $M = 1,5 \text{ kg}$ un projectil de massa $m = 15 \text{ g}$. Quan el pèndol està a la seva altura màxima la corda de la qual penja forma un angle $\alpha = 60^\circ$ amb la vertical. La longitud del pèndol és $L = 2 \text{ m}$. Trobeu la velocitat del projectil.

5.6 Força elàstica i energia

La força amb que respon una molla quan es comprimeix o s'estira una distància x , ve donada per la *Llei de Hooke*

$$\mathbf{F} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$$

on $\mathbf{k}$ és l'anomenada constant elàstica de la molla, i no depèn de $\mathbf{x}$, (idealment). El signe que apareix és informatiu, és a dir ens diu que la força que fa la molla té sentit contrari a la que se li fa per comprimir-la o estirar-la. Per una altra banda, com aquesta força és conservativa, es pot definir una energia potencial associada. En aquest cas s'anomena energia potencial elàstica, i val

$$E = \frac{1}{2}kx^2$$

Exemple 1

Pengem un objecte de massa $m = 2 \text{ kg}$ d'una molla de longitud natural $l_0 = 0,25 \text{ m}$ i observem que la molla s'estira fins a una longitud $l = 0,35 \text{ m}$. Es demana calcular la constant elàstica de la molla.

En equilibri tenim que la força que fa la molla és igual al pes del cos,

$$mg = ky$$

on

$$y = l - l_0$$

per tant

$$k = \frac{mg}{y} = \frac{mg}{l - l_0} = \frac{2 \cdot 9,8}{0,1} = 196 \text{ N/m}$$

Exemple 2

Calculeu la força que cal per comprimir una molla de constant elàstica $k = 10^3 \text{ N/m}$ horitzontalment una distància $x = 10 \text{ cm}$.

Tenim

$$F = k \cdot x = 10^3 \cdot 0,1 = 100 \text{ N}$$

Exemple 3

Comprimim una massa $m = 2 \text{ kg}$ contra una molla de constant elàstica $k = 100 \text{ N/m}$, una distància $x = 0,25 \text{ m}$. Es demana calcular la velocitat amb que es mourà la massa un cop alliberada.

L'energia potencial elàstica emmagatzemada a la molla es convertirà en cinètica quan s'hagi estirat, llavors

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

d'on

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} = \sqrt{\frac{100(0,25)^2}{2}} = 1,77 \text{ m/s}$$

Exemple 4

Es deixa caure des d'una altura $h = 4 \text{ m}$ un objecte de massa $m = 0,1 \text{ kg}$ sobre una molla vertical amb constant elàstica $k = 98 \text{ N/m}$. Es demana calcular la compressió màxima de la molla.

Primer resoldrem l'exemple d'una forma simplificada, suposant que la molla es comprimirà poc i que per tant, podem menysprear l'energia potencial que perd la massa mentre comprimeix la molla.

Fem el balanç d'energia potencial gravitatòria a potencial elàstica

$$mgh = \frac{1}{2}ky^2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1 \cdot 9,8 \cdot 4}{98}} = 0,28 \text{ m}$$

La molla s'ha comprimit 28 cm , que és poc comparat amb l'altura de la que cau (4 m). Fem-ho ara tenint en compte la pèrdua d'energia potencial gravitatòria al comprimir la molla

$$mg(h + y) = \frac{1}{2}ky^2$$

ara, obtenim una equació de segon grau

$$ky^2 - 2mgy - 2mgh = 0$$

amb solucions

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{2mg \pm \sqrt{(2mg)^2 + 8kmgh}}{2k} \\
 &= \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 9,8 \pm \sqrt{(2 \cdot 0,1 \cdot 9,8)^2 + 8 \cdot 98 \cdot 0,1 \cdot 9,8 \cdot 4}}{2 \cdot 98} \\
 &= \frac{1,96 \pm \sqrt{3077,12}}{196} \\
 y_1 &= 0,29 \text{ m} \quad y_2 = -0,27 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Només la solució positiva té sentit en aquest cas. Veiem que la simplificació que havíem fet era molt bona. Si al fer el primer càlcul, fent l'aproximació, haguéssim obtingut com a resultat, per exemple, $y = 2 \text{ m}$ ja estaria clar que la simplificació *no* és bona, perquè estem suposant que la molla es comprimeix poc, i aquest valor representa la meitat de l'altura que cau. Per tant, hauríem de donar el resultat fent el càlcul de la manera exacta.

Exercicis

En tots els exercicis cal treballar algebraicament i només usar els valors numèrics proporcionats al final del càlcul.

1. Una massa $m_1 = 200 \text{ g}$ es troba en repòs sobre una superfície horitzontal, sense fricció apreciable, unida a l'extrem d'una molla que per l'altre extrem està unida a una paret. Una segona massa $m_2 = 600 \text{ g}$ es desplaça sobre la mateixa superfície cap a m_1 amb una velocitat $v_2 = 4 \text{ m/s}$ i experimenta un xoc frontal, totalment inelàstic, amb m_1 . La constant elàstica de la molla val $k = 500 \text{ N/m}$. Es demana:
 - (a) L'energia mecànica perduda en el xoc.
 - (b) La compressió màxima de la molla.
2. Una molla de constant elàstica 2000 N/m és comprimida 10 cm per dos blocs de masses 5 kg i 2 kg situats als seus extrems. El sistema es deixa lliure sobre una superfície plana sense fregament. Quina serà la velocitat de cada bloc quan deixin d'estar en contacte amb la molla?
3. Es deixa caure un objecte de massa $m = 5 \text{ kg}$ des d'una altura de 3 m sobre una molla de constant elàstica $k = 100 \text{ N/m}$. Calculeu quant es comprimeix la molla.