Funcions.

Producte cartesià.

Donats dos conjunts X (inicial) i Y (final), definim el seu producte cartesià $X \times Y$ com el conjunt dels parells ordenats (x, y) tals que $x \in X$ i $y \in Y$.

Exemple 1.
Donats $X = \{1, 2, 3\}$ i $Y = \{a, b, c, d\}$, tenim

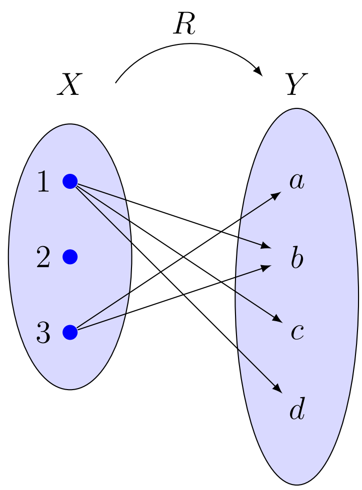
$$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b),\\ (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}$$

Correspondències.

Una correspondència o relació entre dos conjunts X, Y és un subconjunt del producte cartesià de $X \times Y$

Exemple 2.
A partir dels conjunts de l'exemple 1 podem considerar la correspondència $R : X \to Y$

$$R = \{(1, b), (1, c), (1, d), (3, a)(3, b)\}$$



Diem que l'element 1 té *imatges* $\{a, b, c\}$ i que les *imatges* de 3 són $\{a, b\}$. El *domini* de la relació R és el subconjunt del conjunt X de partida tal que els seus elements tenen imatge. En el nostre cas $Dom(R) = \{1, 3\}$. Anomenem *imatge* o *recorregut* al subconjunt del conjunt Y d'arribada tal que els seus elements estan relacionats amb algun dels de partida. En aquest exemple $Im(R) = \{a, b, c, d\} = Y$.

Donada una correspondència $R : A \to B$ entre dos conjunts definim la correspondència inversa $R^{-1} : B \to A$ com la relació entre A i B amb el *sentit de les fletxes canviat*. Es deixa com exercici representar R^{-1} per l'exemple 2.

Aplicacions.

Hi ha un tipus de correspondències que tenen un interés especial. Són aquelles en les que tot element del conjunt de partida té una i només una, imatge. Aquestes correspondències s'anomenen *aplicacions* o funcions.

Tipus d'aplicacions.

- Diem que una aplicació $F : X \to Y$ és **injectiva** si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \quad \forall\, a, b \in X$
- Diem que una aplicació $F : X \to Y$ és **exhaustiva** o **suprajectiva** si $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ tal que $f(x) = y$
- Diem que una aplicació és **bijectiva** si és injectiva i exhaustiva alhora.

Exemple 2.
Considerem els conjunts $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{a, b, c, d\}$. A partir d'ells podem considerar les aplicacions

$$\begin{aligned} f &= \{(1, a), (2, a), (3, b)\} \\ g &= \{(1, a), (2, b), (3, c)\} \\ h &= \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c), (5, d)\} \\ j &= \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\} \end{aligned}$$

Es comprova que f no és injectiva ni exhaustiva, g és injectiva però no exhaustiva, g no és injectiva però si exhaustiva i j és injectiva i exhaustiva.

Aplicació inversa.

Sigui f una aplicació, si la correspondència f^{-1} també és aplicació, direm que f té inversa. No és difícil imaginar quina és la condició perquè una aplicació tingui inversa.

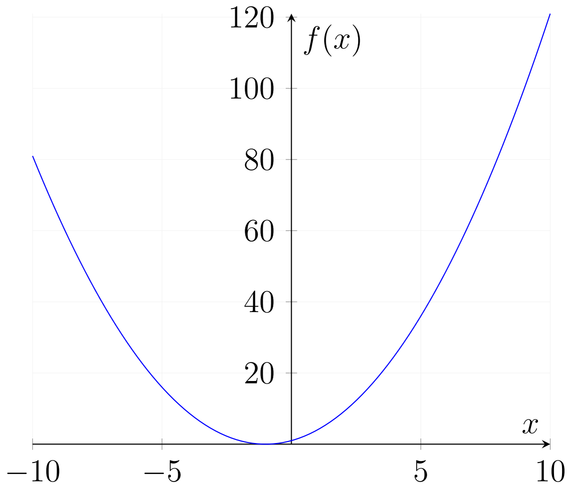
Donada f aplicació, la condició necessària i suficient perquè existeixi la seva inversa f^{-1}, és que f sigui injectiva.

Sovint els conjunts de partida i arribada tindran un nombre infinit d'elements. Llavors la representació d'una aplicació amb diagrames, com la de l'exemple 2 no és pràctica. El que farem llavors és representar l'aplicació amb uns eixos cartesians. El conjunt de partida el representarem amb un eix horitzontal i el d'arribada amb un eix vertical. Cadascuna de les *fletxes* que teniem al diagrama quedarà representada per un punt.

Per exemple, la funció

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

es pot representar



Funcions reals de variable real.

A partir d'ara només considerarem funcions reals de variable real.

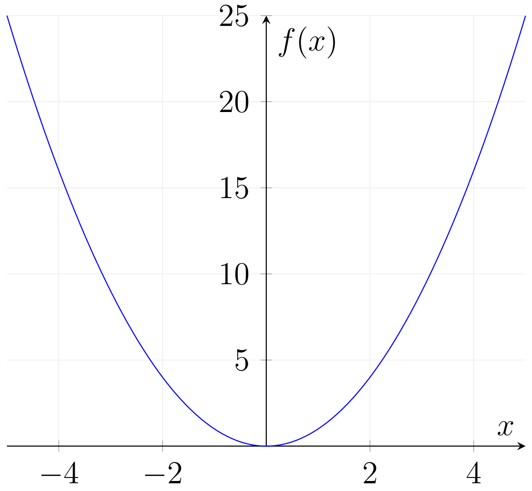
$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

La variable x s'anomena *variable independent* i la variable y *variable dependent*.

Al tema següent es discutirà quin és el domini de les funcions elementals. Ara considerem característiques típiques de les funcions que cal conèixer.

- **Monotonia (creixement/decreixement).**

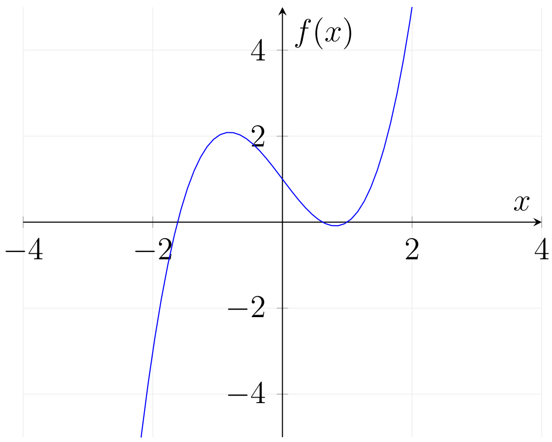
  Una funció $f(x)$ és *creixent* en un interval si al augmentar la x augmenta la y. Una funció és *decreixent* en un interval si al augmentar la x la y disminueix.



Aquesta funció és creixent a l'interval $(0, \infty)$ i decreixent a $(-\infty, 0)$

- **Curvatura (concavitat/convexitat).**

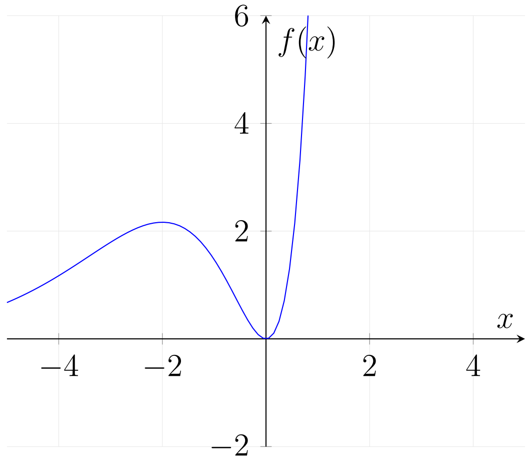
  Una funció $f(x)$ és *còncava* en un punt si la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt està per sota de la gràfica, si està per sobre llavors es diu *convexa*.



  Aquesta funció és convexa en l'interval $(-\infty, 0)$ i còncava en $(0, \infty)$

- **Extrems relatius (màxims/mínims).**

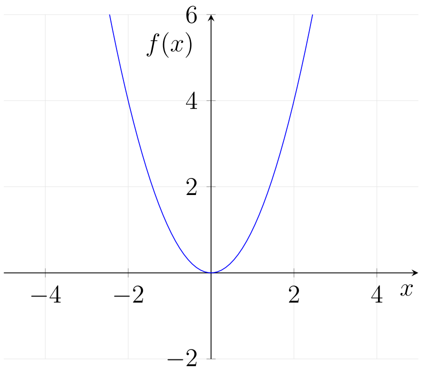
  Una funció $f(x)$ té un *màxim* en un punt si canvia de decreixent a creixent (mirant d'esquerra a dreta les x), i té un *mínim* si canvia de decreixent a creixent.

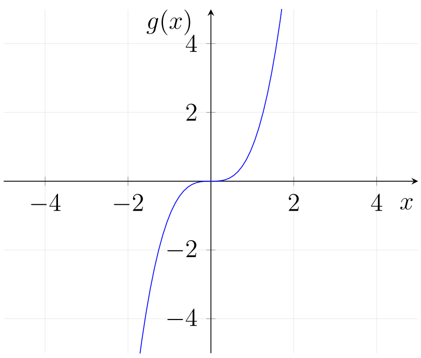


Aquesta funció té un màxim relatiu a $x = -2$ i un mínim absolut $x = 0$

Simetries.

Es diu que una funció $f(x)$ és *parella* si $f(-x) = f(x)$ i diem que es *senar* si $f(-x) = -f(x)$. Les funcions parelles tenen simetria respecte l'eix OY i les funcions senars tenen simetria respecte l'origen de coordenades.



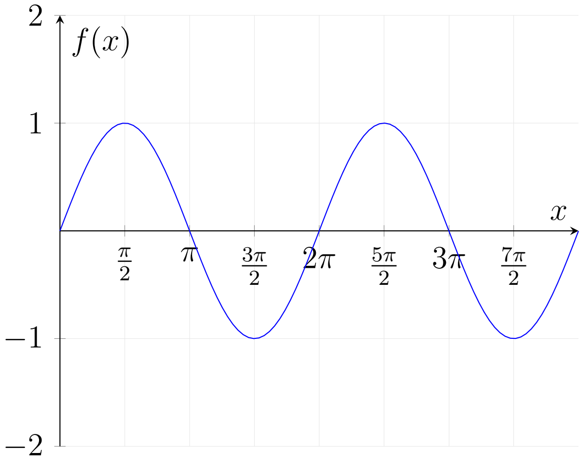


Les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3$ són parella i senar respectivament i tenen les simetries esperades.

- **Periodicitat.**

  Es diu que una funció $f(x)$ és periòdica de període T si es compleix

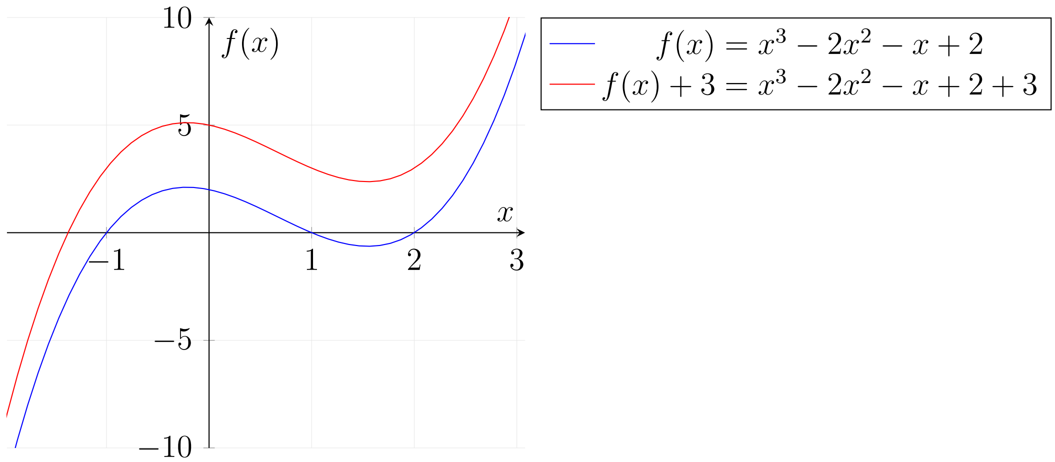
$$f(x+T)=f(x)$$



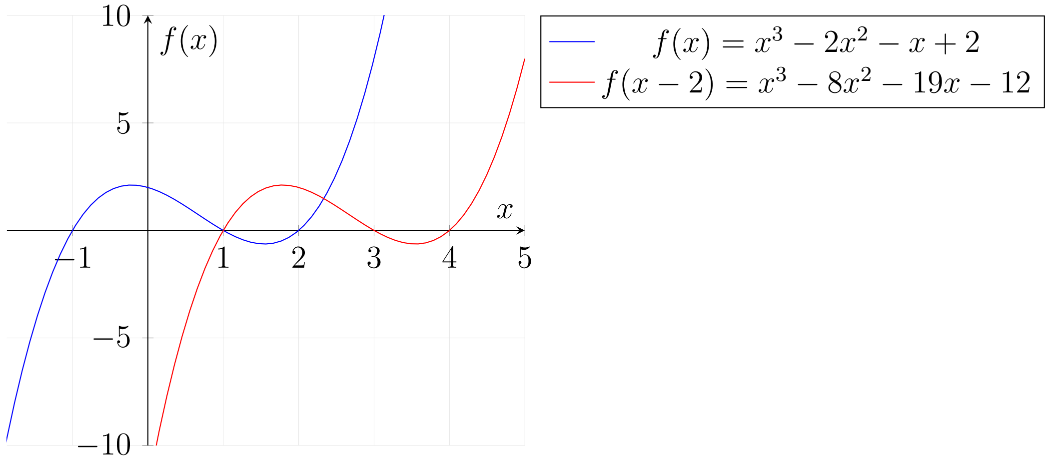
- **Transformacions de funcions.**

  Cal conèixer les següents transformacions aplicables a funcions i quin és el seu efecte sobre la gràfica.

$$y=f(x)+k$$

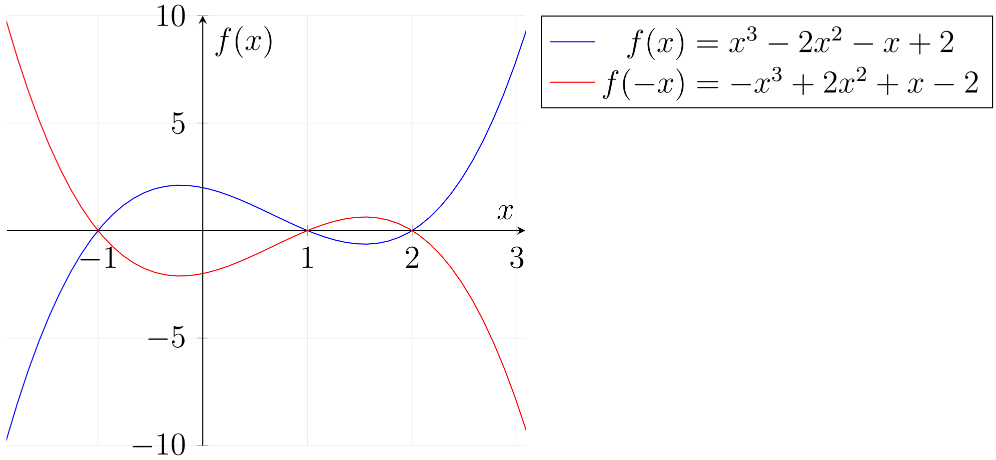


$$y = f(x+k)$$



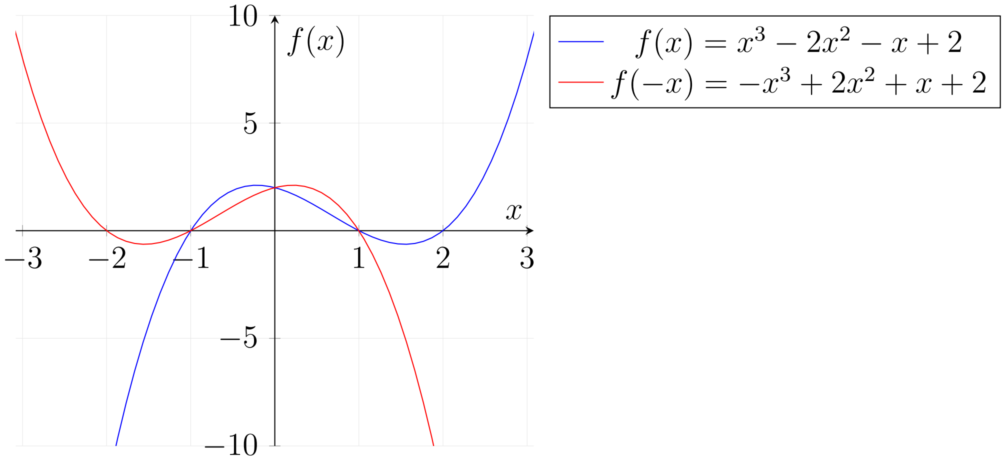
10
5
−5
−10
f(x)
x
−1
1
2
3
4
5
f(x) = x^3 − 2x^2 − x + 2
f(x − 2) = x^3 − 8x^2 − 19x − 12

$$y = -f(x)$$



10
5
−5
−10
f(x)
x
−1
1
2
3
f(x) = x^3 − 2x^2 − x + 2
f(−x) = −x^3 + 2x^2 + x − 2

$$y = f(-x)$$



- **Operacions amb funcions.**

  Definim les següents operacions entre funcions reals de variable real

  1. *Suma/resta de funcions*

  $$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

  2. *Producte*

  $$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

  3. *Quocient*

  $$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

  4. *Composició de funcions*

  $$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$

- **Funció inversa**

  Donada una funció $f(x)$ definim la seva inversa com la funció $f^{-1}(x)$ tal que

  $$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Per trobar la inversa d'una funció, aïllem primer la variable x per obtenir $x = f^{-1}(y)$ (expressió útil per calcular antiimatges si cal) i després fem el canvi $x \leftrightarrow y$.

Exemple

Volem trobar la inversa de

$$f(x) = 3x - 2$$

escrivim la funció com

$$y = 3x - 2$$

Aïllem la x

$$x = \frac{y+2}{3} = f^{-1}(y)$$

i ara fem $x \leftrightarrow y$

$$y = \frac{x+2}{3} = f^{-1}(x)$$