Límit d'una funció. Continuïtat.

Límit d'una funció en un punt.

Conceptes bàsics

- $x \to c$ significa que la variable x pren valors tant propers a c com vulguem però sense arribar-hi.
- $x \to c^-$ significa que els valors s'aproximen a c des de l'esquerra de c.
- $x \to c^+$ significa que els valors s'aproximen a c des de la dreta.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ es llegeix *límit quan x tendeix a 'c'* i significa el valor al que tendeix la funció quan la variable de la funció tendeix a c.

Exemple 1.

- $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 - 1) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$
- $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+4}{x-5} = \frac{(-1)^3+4}{-1-5} = \frac{-1+4}{-1-5} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$

Pot passar que el límit d'una funció no sigui acotat, per exemple

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{0} = \infty$$

on la darrera igualtat s'ha de precisar ja que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

i en canvi

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

En general, escriurem ∞ en lloc de $+\infty$. Un parell de resultats bàsics al treballar en aquest context són

$$\frac{k}{\infty} = 0\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{R}; \qquad \frac{k}{0} = \infty\,, \quad \forall\, k \neq 0$$

Indeterminacions.

Sovint, el resultat d'un límit serà indeterminat i llavors haurem de resoldre aquesta indeterminació. D'indeterminacions n'hi ha de diversos tipus, en aquest curs només en tractarem unes poques i a més, els casos més senzills.

Tipus d'indeterminacions

- $\infty - \infty$ Es deguda a que $\infty + k = \infty\,, \quad \forall\, k$
- $\frac{\infty}{\infty}$ Es deguda a que $\infty \cdot k = \infty\,, \quad \forall\, k \neq 0$
- $\frac{0}{0}$ Es deguda a que $0 \cdot k = 0\,, \quad \forall\, k \neq \infty$
- $0 \cdot \infty$ Es deguda a que $0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$

Indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$
Donat un quocient de polinomis, el seu límit quan x tendeix a infinit és

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q}$$

- ∞ si $p > q$
- 0 si $p < q$
- $\frac{a_p}{b_p}$ si $p = q$

Aquest resultat es pot estendre a quocients no polinomials, per exemple

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x^3 - x^2 + 5x - 1}}{\sqrt[3]{x^2 - 7x + 12}} = 0$$

ja que el "grau" $\frac{3}{5}$, del numerador és més petit que el "grau" $\frac{2}{3}$ del denominador.

Indeterminació $\infty - \infty$
Es pot donar en diferents casos. La idea general és transformar la indeterminació en el tipus $\frac{\infty}{\infty}$ per aplicar la idea anterior.

Exemple 2.

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{2x^2 + 3x + 1}) - \sqrt{2x^2 + x - 7} =$$

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 + x - 7}) \cdot \frac{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 + x - 7}}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 + x - 7}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1 - (2x^2 + x - 7)}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 + x - 7}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 8}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 + x - 7}} = \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Exemple 3.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x+1}-\frac{3x^2-4}{x-2}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x-2)-(3x^2-4)(2x+1)}{(2x+1)(x-2)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-(6x^3+3x^2-8x-4)}{2x^2-3x-2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^3-5x^2+8x+4}{2x^2-3x-2}=-\infty$$

Indeterminació $\frac{0}{0}$
Si es presenta com un quocient de polinomis caldrà factoritzar-los per poder eliminar la indeterminació. Si hi ha arrels, pot ser útil multiplicar i dividir per el conjugat tal com hem fet abans a l'exemple 2.

Exemple 4.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+3)}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x+3}=\frac{-3}{2}$$

Noteu que és essencial per poder simplificar el terme $x+1$ que seguim escrivint davant el quocient $\lim\limits_{x\to -1}$ per garantir que no dividim per zero.

Exemple 5.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$$

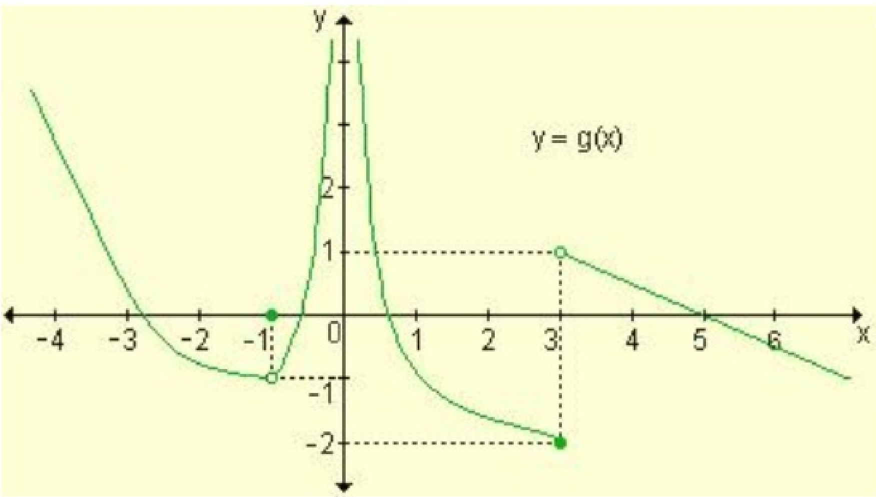
Continuïtat.

Diem que una funció $f(x)$ és contínua en un punt x_0 sii

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

quan els dos membres de la igualtat existeixen. Perquè existeixi el de l'esquerra han d'existir (i ser iguals) els corresponents límits laterals en x_0. Perquè existeixi el membre de la dreta ha d'existir la imatge de x_0.

Exemple



En aquest exemple veiem com pot fallar la continuïtat d'una funció.

- En $x_0 = -1$ la funció no és contínua perquè a pesar de que existeixen els dos membres de la igualtat, en aquest cas són diferents. Aquest tipus de discontinuïtat s'anomena *evitable*, ja que canviant la definició d'un sol punt, podem fer la funció contínua.
- En $x_0 = 0$ la funció no és contínua perquè els límits laterals no són finits. Aquesta és una discontinuïtat *de salt* infinit.
- En $x_0 = 3$ la funció no és contínua perquè els límits laterals són diferents i llavors, no existeix el membre de l'esquerra de la igualtat en la definició de continuïtat. Aquest és un exemple de discontinuïtat *de salt* finit.

Asímptotes.

Les asímptotes són rectes a les que una funció s'acosta tant com vulguem. Existeixen tres tipus

- Asímptotes verticals. Quan

$$\lim_{x\to k} f(x) = \pm\infty$$

  llavors diem que $f(x)$ té una asímptota vertical en $x = k$

- Asímptotes horitzontals. Quan

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k$$

  llavors diem que $f(x)$ té una asímptota horitzontal en $y = k$

- Asímptotes oblíqües. Suposarem que són de la forma

$$y = mx + n$$

  llavors

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

  i si és $m \neq 0, \infty$ podrem calcular

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$$

Noteu que la funció no pot tallar en cap cas les asímptotes verticals, però sí que ho pot fer amb les horitzontals i oblíqües.