Matemàtiques Primer Batxillerat

Artur Arroyo i Pascual

Curs 09-10

Matemàtiques primer batxillerat

1. Nombres reals
   - Classificació dels nombres reals
   - La recta real
   - Radicals, operacions i racionalització
   - Logaritmes

Els nombres naturals

Comencem recordant els diferents conjunts de nombres dins els reals.

Definició

El conjunt dels nombres *naturals* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Exemples

$$123 \in \mathbb{N}, \quad -5 \notin \mathbb{N}, \quad \frac{2}{9} \notin \mathbb{N}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{N}, \quad \pi \notin \mathbb{N}$$

Atenció

$$0 \notin \mathbb{N}$$

Els nombres enters

Si volem incloure el zero hem d'ampliar el conjunt dels nombres naturals. Això es fa considerant els anomenats nombres enters

Definició

El conjunt dels nombres *enters* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Exemples

$$123 \in \mathbb{Z}, \quad -5 \in \mathbb{Z}, \quad \frac{2}{9} \notin \mathbb{Z}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}, \quad \pi \notin \mathbb{Z}$$

Atenció!

Sovint es parla de nombres positius, negatius, i hi pot haver una mica de confusió. Hem de tenir clar que els naturals $\mathbb{N}$ són els enters $\mathbb{Z}$ que són *positius* i d'aquesta forma veiem que quan es parla de nombres positius el zero no hi és.
Si volem considerar $\mathbb{N} \cup \{0\}$, haurem d'anomenar aquests nombres *no negatius*.

Els nombres racionals

És clar que nombres com $\frac{3}{7}$ ó $\frac{-5}{11}$ no són enters a pesar de que el numerador i el denominador sí que ho són. Per poder treballar amb les fraccions cal estendre els enters.

Definició

El conjunt dels nombres *racionals* $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}$, amb $a, b \in \mathbb{Z}\}$

Exemples

$$123 \in \mathbb{Q}, \quad \frac{2}{9} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad \pi \notin \mathbb{Q}$$

Fracció generatriu d'un nombre decimal

Arribats a aquest punt hem de pensar com tractar nombres com $1,23 \quad 2,7272\ldots \quad 4,9666\ldots$ Aquests nombres són racionals, (això s'ha de justificar), i sempre es pot trobar l'anomenada *fracció generatriu*. Perquè podem afirmar que són racionals? Fixem-nos que el primer té dues xifres decimals, al segon, malgrat que en té un nombre infinit, sempre es repeteix el mateix patró i el tercer també té un patró que es repeteix a pesar de que hi ha xifres diferents entre ell i la coma.

Fracció generatriu d'un nombre decimal

Nombres decimals. Classificació

$$\text{Nombres decimals}\begin{cases}\text{Decimals periòdics} & \begin{cases}\text{Periòdics purs}\\ \text{Periòdics mixtos}\end{cases}\\ \text{Decimals exactes}\end{cases}$$

Exemples

El nombre 1,23 és decimal exacte. $2,7272\ldots$ és decimal periòdic pur (el periode és 72) i $4,9666\ldots$ és decimal periòdic mixt (el periode és 6)

Fracció generatriu d'un nombre decimal exacte

- El nombre 1,23 és decimal exacte. La seva fracció generatriu es troba de forma immediata,

$$1,23 = \frac{123}{100}$$

Fracció generatriu d'un nombre decimal periòdic pur

- El nombre $2,7272\ldots$ és decimal periòdic pur, per trobar la seva fracció genetratriu seguim el següent procés:

$$
\begin{aligned}
\text{anomenem x al nombre decimal,} \quad & x = 2,7272\ldots & (1)\\
\text{multipliquem per 100,} \quad & 100x = 272,7272\ldots & (2)\\
\text{restem (2) de (1),} \quad & 99x = 270 & (3)\\
\text{aïllant la x,} \quad & x = \frac{270}{99} = \frac{30}{11} & (4)
\end{aligned}
$$

Es comprova fàcilment amb qualsevol calculadora que $\frac{30}{11} = 2,7272\ldots$ de forma que aquest nombre decimal és racional.

Fracció generatriu d'un nombre decimal periòdic mixte

- El nombre $4,9666\ldots$ és decimal periòdic mixte, per trobar la seva fracció genetratriu seguim el següent procés:

$$
\begin{aligned}
\text{anomenem x al nombre decimal,} \quad & x = 4,9666\ldots && (5)\\
\text{multipliquem per 100,} \quad & 100x = 496,666\ldots && (6)\\
\text{ara multipliquem (5) per 10,} \quad & 10x = 49,666\ldots && (7)\\
\text{restem (7) de (6),} \quad & 90x = 447 && (8)\\
\text{aïllant la x,} \quad & x = \frac{447}{90} = \frac{149}{30} && (9)
\end{aligned}
$$

Propietat de densitat dels racionals

Important!

Entre dos nombres racionals qualssevol a, b sempre se'n pot trobar un altre, n'hi ha prou de fer l'operació $\frac{a+b}{2}$. Aquesta propietat és prou important com per a tenir nom i es farà servir més endevant.

Definició

El conjunt dels nombres racionals $\mathbb{Q}$ és *dens* a $\mathbb{R}$.

Exemple 1

Quin nombre és just al mig de 3 i 11? Resposta: $\frac{3+11}{2} = \frac{14}{2} = 7$

Exemple 2

Quin nombre és just al mig de $\frac{3}{5}$ i $\frac{11}{7}$?

Resposta: $\frac{\frac{3}{5}+\frac{11}{7}}{2} = \frac{\frac{21+55}{35}}{2} = \frac{\frac{76}{35}}{2} = \frac{76}{70} = \frac{28}{35}$

Operacions amb fraccions

Als exemples anteriors hi ha un parell d'operacions que, tot i ser molt bàsiques, s'han de tenir molt clares ja que s'utilitzaran sovint al llarg del curs.

Suma de nombres racionals

Per a sumar dues fraccions $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ sempre podem fer

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}$$

A vegades pot ser més ràpid reduir a comú denominador les fraccions. En cada cas s'haurà de valorar quin mètode fer servir.

Fraccions amb fraccions

Farem servir la fòrmula: $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{AD}{BC}$

Els nombres irracionals $\mathbb{I}$

Hi ha nombres que tenen infinites xifres decimals però al no ser periòdics no se'n pot trobar la fracció generatriu i per tant, no són racionals.

Exemples

$$\sqrt{3} \in \mathbb{I}, \quad \sqrt[3]{7} \in \mathbb{I}, \quad \pi \in \mathbb{I}, \quad e \in \mathbb{I}, \quad \phi \in \mathbb{I}$$

Noteu que no tots els nombres irracionals són arrels d'algun nombre. Entre els nombres irracionals hi ha les constants notables més importants. A l'exemple apareixen el nombre pi (π), el nombre d'Euler (e) i l'anomenada raó àurea (ϕ).

Compte!

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt[3]{-125} = -5, \quad \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}, \ldots$$

No totes les arrels són nombres irracionals!

Els nombres reals

Amb tot el que hem vist abans podem establir la següent relació d'inclusió entre els diferents conjunts.

Els nombres reals

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \{\emptyset\}$$

Relació d'ordre

- Els nombres reals es representen còmodament sobre una recta amb uns símbols a dreta (∞) i esquerra (-∞) que completen els reals, en el sentit que no hi ha cap nombre real més gran que infinit.

Compte!

Aquests símbols *no* són nombres reals: $\pm\infty \notin \mathbb{R}$

- En el conjunt dels nombres reals s'estableix una relació d'ordre que ens permet decidir si un nombre és més gran, més petit o igual que un altre.

Relació d'ordre en els nombres reals

Direm que un nombre a és més gran que un altre b, si a està a la dreta que b a la recta real.

Intervals

A la recta real es poden considerar diferents tipus de conjunts, anomenats *intervals*. Segons incloguin o no els seus extrems es classifiquen en:

- Interval obert: (a, b). Són els nombres estrictament més grans que a i estrictament més petits que b.
- Interval tancat: $[a, b]$. Són els nombres més grans o iguals que a i més petits o iguals que b.
- Interval semiobert: $[a, b)$, $(a, b]$. El primer conté a però no b i el segon a l'inrevés .

També es poden considerar intervals infinits.

Exemples

Si considerem els conjunts:

$$A = (-3, 10),\ B = [-5, -1),\ C = (2, \infty),\ D = (-\infty, 12]$$

Llavors:

$$-4 \notin A, \quad -3 \notin A, \quad 9 \in A, \quad 10 \notin A, \quad 11 \notin A, \quad -5 \in B$$

$$2 \notin C, \quad 0 \in C, \quad 12 \in D, \quad 12,0001 \notin D$$

Noteu que, en qualsevol cas, ∞ o $-\infty$ sempre es prenen oberts, ja que no són nombres reals.

Notació científica

- Un nombre en notació científica és de la forma $\mathbf{a} \cdot \mathbf{10^b}$ on $|a|$ és un nombre decimal exacte de l'interval $[1, 10)$ i l'exponent, b, és un nombre enter. Anomenarem el nombre *a mantissa* i el nombre *b ordre de magnitud*.
- La notació científica es fa servir per representar nombres molt grans o molt petits.

Exemples

Moltes constants físiques notables s'escriuen en notació científica:

- velocitat de la llum en el buit, $c = 3 \cdot 10^8 m/s$
- nombre d'Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} mol^{-1}$
- càrrega de l'electró, $q_e = 1,62 \cdot 10^{-19} C$

Radicals

Recordem amb alguns exemples, com es calculen les potències.

- Com es calcula 3^5 ?

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

- Com es calcula 3^{-4} ?

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$

- Com es calcula $3^{\frac{1}{2}}$? i $3^{\frac{5}{7}}$?

Radicals

Per representar aquests nombres farem servir el símbol de l'arrel, de forma que les arrels no són més que nombres amb exponent fraccionari.

Arrel d'un nombre

Definim $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Llavors tenim:

Exemples

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ i $3^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{5}$

Operacions amb radicals

- **Reduir radicals a índex comú.**
  Farem servir les propietats que ja coneixem per reduir fraccions a comú denominador.

Exemple

$$\sqrt{2}\ ;\ \sqrt[3]{3}\ ;\ \sqrt[5]{5}$$

Expressem els radicals com a potències d'exponent fraccionari:

$$2^{\frac{1}{2}},\ 3^{\frac{1}{3}},\ 5^{\frac{1}{5}}$$

Tenim que m.c.m.(2,3,5)=30. Reduïm a comú denominador els exponents i tornem a expressar els nombres com a radicals:

$$2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{15}{30}}$$

- **Treure o introduir factors de dins de l'arrel**
  Pot ser útil per simplificar expressions.

Exemple

$\sqrt[3]{a^4b^2c^9} = ac^3\sqrt[3]{ab^2} \qquad ab^2c^3\sqrt[5]{a^3bc} = \sqrt[5]{a^8b^{11}c^{16}}$

- **Sumar o restar radicals**

Exemple

$$\begin{aligned}\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45} = & \\ & = \sqrt{2^25} - 3\sqrt{5^3} + 2\sqrt{3^25} \\ & = 2\sqrt{5} - 3\cdot 5\sqrt{5} + 2\cdot 3\sqrt{5} \\ & = -7\sqrt{5}\end{aligned}$$

- **Multiplicar o dividir radicals**
  Sovint caldrà reduir a índex comú.

Exemple

$$\frac{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{4}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[6]{5^2}\cdot\sqrt[6]{4^3}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[6]{5^2\cdot 4^3}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[12]{5^4\cdot 4^6}}{\sqrt[12]{3^3}} = \sqrt[12]{\frac{5^4\cdot 4^6}{3^3}}$$

- **Potències de radicals**
  En aquest cas n'hi ha prou d'expressar els radicals en forma de potència i aplicar propietats ja conegudes.

Exemple

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^{12}}{b^{18}}}} = \left(\left(\frac{a^{12}}{b^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{a^{12}}{b^{18}}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{a^2}{b^3}$$

Racionalització

Racionalitzar consisteix a "treure" les arrels que hi pugui haver al denominador.

Fraccions del tipus $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$

En aquest cas n'hi ha prou de multiplicar i dividir per $\sqrt[n]{b^{n-1}}$

Exemple

$$\frac{6}{\sqrt[7]{3^2}} = \frac{6}{\sqrt[7]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^5}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{3^5}}{3}$$

Racionalització

Fraccions del tipus $\frac{a}{b\pm\sqrt{c}}$, $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

En aquest cas n'hi ha prou de multiplicar i dividir pel conjugat del denominador

Exemple

$$\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{4(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5} = \frac{4(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-2} = -2(\sqrt{3}-\sqrt{5})$$

Logaritmes

Per tal d'entendre què és el logaritme comencem amb unes exemples.

Exemples

- A quin nombre hem d'elevar 2 per tal que doni 16?
  $2^? = 16$
  $2^4 = 16$
  La resposta és 4.
- A quin nombre hem d'elevar 10 per tal que doni 1000?
  $10^? = 1000$
  La resposta és 3.
- A quin nombre hem d'elevar 7 per tal que doni 49?
  La resposta és 2.

Logaritmes

Les preguntes anteriors es poden reecriure mitjançant logaritmes:

- A quin nombre hem d'elevar 2 per tal que doni 16? (Resposta: 4)
  És equivalent a preguntar, quant val el logaritme de 16 en base 2? ($\log_2 16 = 4$)
- A quin nombre hem d'elevar 10 per tal que doni 1000?
  Quant val el logaritme de 1000 en base 10? ($\log_{10} 1000 = 3$)
- A quin nombre hem d'elevar 7 per tal que doni 49?
  Quant val el logaritme de 49 en base 7? ($\log_7 49 = 2$)

Definició de logaritme

Ara ja estem en condicions de donar la definició de logaritme

Definició

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b = a^c$$

El nombre b, s'anomena *base* del logaritme i el nombre a, s'anomena *argument* del logaritme.

Atenció!

Quan la base del logaritme és 10, no cal escriure-la

Exemple

$\log_{10} 73 \equiv \log 73$

Atenció

Quan la base del logaritme és la constant d'Euler, e, llavors el logaritme s'anomena natural i s'escriu de forma lleugerament diferent

Exemple

$\log_e 73 \equiv \ln 73$

Propietats dels logaritmes

- Casos particulars:

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

- Propietats importants
  - $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$
  - $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$
  - $\log_b a^n = n \log_b a$

Exemple

Fent servir les propietats dels logaritmes, calcular:

$$\log_5 625 - \log_9 81 + \log_{64} 8$$

Solució:

$$\log_5 625 - \log_9 81 + \log_{64} 8 =$$
$$\log_5 5^4 - \log_9 9^2 + \log_{64} 64^{\frac{1}{2}} =$$
$$4\log_5 5 - 2\log_9 9 + \frac{1}{2}\log_{64} 64 = 4 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$