Matemàtiques Primer Batxillerat

Artur Arroyo i Pascual

Curs 09-10

Matemàtiques primer batxillerat

1. Equacions, sistemes i inequacions
   - El binomi de Newton. Arrels d'un polinomi. Factorització
   - Altres equacions
   - Sistemes d'equacions lineals. Classificació
   - Sistemes d'equacions no lineals
   - Inequacions de primer i segon grau

Binomi de Newton

Motivació del tema

Recordem la identitat notable:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Suposem ara que volem calcular $(a+b)^4$. Ho podriem fer de la següent forma:

$$(a+b)^4 = \qquad (1)$$

$$(a+b)^2\,(a+b)^2 = \qquad (2)$$

$$(a^2+2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2) = \qquad (3)$$

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \qquad (4)$$

Binomi de Newton

La fòrmula per calcular qualsevol potència d'un binomi és:

Binomi de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i =$$

$$\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Abans de res hem d'explicar alguns elements que apareixen a aquesta expressió.

Nombre factorial

Definició

Definim el factorial d'un nombre N, com

$$N! = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdots 1$$

Convindrem que $0! = 1$

Exemple

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Nombres combinatoris

Definició

Definim el nombre combinatori *r sobre s*

$$\binom{r}{s} = \frac{r!}{s!(r-s)!}$$

Exemple

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 5\cdot 2 = 10$$

Binomi de Newton

Ara ja podem entendre com funciona la fòrmula del binomi de Newton

Exemple

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3 \\
&= 1 \cdot a^3 b^0 + 3 \cdot a^2 b^1 + 3 \cdot a^1 b^2 + 1 \cdot a^0 b^3 \\
&= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}
$$

Atenció!

Convé recordar que $A^0 = 1$ per qualsevol $A \neq 0$

Factorització de polinomis

- Suposem que ens demanen fer el següent càlcul

$$(x-1)(x+1)(x+2)$$

- El resultat és:

$$(x-1)(x+1)(x+2) = (x^2-1)(x+2) = x^3+2x^2-x-2$$

Definició

El procés invers, donat un polinomi escriure'l com a producte de polinomis del grau més petit, s'anomena *factoritzar* el polinomi.

Definició

Donat un polinomi $P(x)$, anomenem arrel del polinomi a qualsevol nombre a que sastisfà $P(a) = 0$

Exemple

Les arrels del polinomi $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ són els nombres 1, -1 i -2.

$$P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 = 0$$
$$P(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = 0$$
$$P(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - (-2) - 2 = 0$$

Atenció

Amb l'expressió factoritzada del polinomi $(x-1)(x+1)(x+2)$ és immediat comprovar que 1, -1, -2 són les seves arrels.

Polinomis de segon grau

- Per factoritzar un polinomi, típicament haurem de trobar les seves arrels. Això s'aconsegueix igualant el polinomi a zero i resolent l'equació que en resulti.
- Si tenim un polinomi de segon grau $P(x) = ax^2 + bx + c$ l'equació

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

sempre es pot resoldre amb ajut de la fòrmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sempre obtenim *dues* solucions, però matitzem...

Tipus de solucions

Definició

Definim el discriminant Δ del polinomi $P(x) = ax^2 + bx + c$ com

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

D'aquesta manera podem tenir tres casos segons el signe del discriminant:

$$\begin{cases} \Delta > 0 & \text{Les dues solucions són reals i diferents} \\ \Delta < 0 & \text{Les dues solucions són imaginàries} \\ \Delta = 0 & \text{Les dues solucions són iguals} \end{cases}$$

Teorema fonamental de l'àlgebra

Proposició

Siguin x_1, x_2 les arrels del polinomi $P(x) = ax^2 + bx + c$, llavors el polinomi factoritza com

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Això és un resultat totalment general, de forma que si tenim un polinomi $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, factoritzarà com:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

on els x_i són les seves arrels.

Exemples

Exemple 1

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

Les dues solucions són 2 i -3, per tant la factorització s'escriu

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

Exemples

Exemple 2

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Les dues solucions són imaginàries, no són nombres reals i no podem escriure la factorització. Direm que el polinomi $P(x)$ és primer.

Exemple 3

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{-6 \pm 0}{2}$$

Les dues solucions són -3 i -3, per tant la factorització s'escriu

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$$

Atenció!

És important recordar que sempre hi ha dues solucions, encara que siguin iguals. El grau del polinomi abans i després de factoritzar-lo ha de ser el mateix.

Polinomis de grau > 2

- En el cas de polinomis de tercer grau

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

  a pesar de que també hi ha una fòrmula per trobar les arrels, aquesta és tan complicada que és més eficaç fer servir un mètode, degut al matemàtic italià Paolo Ruffini.
  L'inconvenient d'aquest mètode és que només proporciona les solucions racionals de l'equació (si en té).
- En el cas de polinomis de quart grau la fòrmula és encara més complicada i farem servir el mètode de Ruffini.
- En el cas de polinomis de cinquè grau o superior, ni tan sols existeix fòrmula i per tant, sempre farem Ruffini.

Mètode de Ruffini

Divisió euclidiana de polinomis

Recordem que al dividir un polinomi $P(x)$ entre $x - a$ obtenim un quocient $q(x)$ i un residu r i podem escriure:

$$P(x) = (x - a)q(x) + r$$

Repassarem el mètode de Ruffini amb uns exemples. Aquest mètode no és més que una divisió de polinomis encoberta.

Mètode de Ruffini

Dividir $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 8$ entre $x - 2$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 6 & -8 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 6 & -8 \\ 2 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 6 & -8 \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 6 & -8 \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & -2 & & \end{array}$$

Noteu que al dividir entre $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ hem de posar el valor **a** al Ruffini.

Mètode de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 6 & -8 \\ 2 & & 2 & -4 & \\ \hline & 1 & -2 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 6 & -8 \\ 2 & & 2 & -4 & \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 6 & -8 \\ 2 & & 2 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 6 & -8 \\ 2 & & 2 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{-4} \end{array}$$

Llavors podem escriure:

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 8 = (x-2)(x^2 - 2x + 2) + (-4)$$

- A l'exemple anterior veiem que el polinomi no queda factoritzat. Pels nostres propòsits el mètode de Ruffini només funcionarà quan el residu sigui zero. Quan passarà això?

Factorització amb Ruffini

Si existeix algun nombre (enter) que faci que el residu sigui zero, aquest nombre ha de ser divisor del terme independent.

Exemples

Si volem factoritzar

1. $x^5 - x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 5x - 12$, haurem de fer Ruffini provant pels divisors de -12, que són $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$
2. $x^7 - 1$, haurem de provar per ± 1

- A vegades el polinomi a factoritzar no és complert i s'haurà de posar zeros on calgui. Si volem factoritzar el polinomi $P(x) = x^3 - 8$ haurem de provar pels divisors de -8.

Factorització

Provem de dividir $P(x) = x^3 - 8$ entre $x - 2$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & 2 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

- Després d'aplicar el mètode un cop, podem escriure

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$$

Per seguir factoritzant, en lloc de seguir el Ruffini, aplicarem la fòrmula de l'equació de segon grau. D'aquesta manera, per resoldre l'equació $x^2+2x+4=0$ fem:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

i com que les solucions no són reals, el procés de factorització s'ha acabat.

Atenció!

Si haguèssim seguit fent Ruffini hauriem d'haver fet el procés sis vegades (els divisors de 4 són $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$), per arribar al mateix resultat, que és que el polinomi x^2+2x+4 es primer i no es pot escriure com a producte de dos factors de primer grau.

Equacions biquadrades

- Si haguéssim de factoritzar el polinomi de grau quatre $x^4 - 29x^2 + 100$, podríem fer servir el mètode de Ruffini, però hi ha una forma més fàcil de fer-ho. La idea és que si fem el canvi de variable $x^2 = t$, el polinomi queda $t^2 - 29t + 100$ que es pot resoldre per donar:

$$t = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \cdot 100}}{2} = \frac{29 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{29 \pm 21}{2}$$

$$t = \begin{cases} 25 \\ 4 \end{cases} \quad \text{i desfent el canvi de variable}$$

$$x = \pm\sqrt{t} \Rightarrow x = \begin{cases} \pm\sqrt{25} = \pm 5 \\ \pm\sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Equacions amb fraccions algebriques

- Per resoldre aquests tipus d'equacions n'hi ha prou de eliminar denominadors i resoldre l'equació resultant.

Exemple

$$\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{1}{x}$$

Per treure els denominadors multipliquem a les dues bandes de l'equació per l'expresió $x(x-1)$,

$$x(x-1)\frac{x+1}{x-1} - x(x-1) = x(x-1)\frac{1}{x} \tag{1}$$

$$x\frac{x+1}{1} - x(x-1) = \frac{x-1}{1} \tag{2}$$

$$x(x+1) - x(x-1) = x-1 \tag{3}$$

Exemple

$$x^2 + x - x^2 + x = x - 1 \tag{4}$$
$$2x = x - 1 \tag{5}$$
$$x = -1 \tag{6}$$

Atenció

Si alguna de les solucions obtingudes annula algun dels denominadors de l'equació inicial, s'ha de descartar.

Equacions irracionals

- Les equacions irracionals es caracteritzen perque la incògnita apareix dins alguna arrel. En general cal elevar al quadrat les dues bandes de l'equació per eliminar les arrels. Sovint s'ha de repetir el procés.

Exemple 1

$$3\sqrt{x+1} = 17 - x \tag{1}$$

$$\left(3\sqrt{x+1}\right)^2 = (17-x)^2 \tag{2}$$

$$9(x+1) = 289 - 34x + x^2 \tag{3}$$

Exemple 1

$$x^2 - 43x + 280 = 0 \tag{4}$$

$$\text{Les solucions són} \quad x_1 = 8,\ x_2 = 35 \tag{5}$$

Atenció!

Les solucions també s'han de comprovar a l'equació original!

En aquest cas:

$$x + 3\sqrt{x+1} = 17\Big|_{x=8} \longrightarrow 8 + 3\sqrt{8+1} = 17 \longrightarrow 17 = 17$$

$$x + 3\sqrt{x+1} = 17\Big|_{x=35} \longrightarrow 35 + 3\sqrt{35+1} = 17 \longrightarrow 53 \neq 17$$

Equacions irracionals

Exemple 2

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-1}=6 \tag{1}$$

$$\sqrt{x+4}=6-\sqrt{2x-1} \tag{2}$$

$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2=\left(6-\sqrt{2x-1}\right)^2 \tag{3}$$

$$x+4=36-12\sqrt{2x-1}+2x-1 \tag{4}$$

Equacions exponencials

- Les equacions exponencials es caracteritzen per tenir la incògnita com a exponent d'algun nombre. Mostrarem com es resolen els casos típics que es poden presentar.

Exemple 1

$4^x = 8 \rightarrow (2^2)^x = 8 \rightarrow 2^{2x} = 8 \rightarrow 2^{2x} = 2^3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

Exemple 2

$$3^{x^2-5x+6} = 1 \rightarrow 3^{x^2-5x+6} = 3^0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow$$

$$x_1 = 2, \; x_2 = 3$$

Equacions logarítmiques

- Les equacions logarítmiques es caracteritzen per tenir la incògnita com a argument o base d'algun logaritme. Típicament s'ha de fer servir les propietats que tenen els logaritmes, vistes al primer tema.

Exemple 1

$$\log(116 - x^2) - 2\log(x-1) = 1 \tag{1}$$

$$\log(116 - x^2) - \log(x-1)^2 = 1 \tag{2}$$

$$\log\frac{116 - x^2}{\log(x-1)^2} = 1 \tag{3}$$

$$\log\frac{116 - x^2}{\log(x-1)^2} = \log 10 \tag{4}$$

Equacions logarítmiques

Exemple 1

$$\frac{116 - x^2}{(x-1)^2} = 10 \quad (5)$$

$$116 - x^2 = 10(x-1)^2 \quad (6)$$

$$116 - x^2 = 10(x^2 - 2x + 1) \quad (7)$$

$$116 - x^2 = 10x^2 - 20x + 10 \quad (8)$$

$$11x^2 - 20x - 96 = 0 \quad (9)$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 11 \cdot (-96)}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\frac{24}{11} \quad \text{no vàlida!} \end{cases}$$

Sistemes d'equacions lineals. Classificació

En aquest curs tractarem la resolució de sistemes de dues equacions amb dues incògnites.

Definició

Un sistema d'equacions lineals d'aquest tipus es pot escriure com:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & c \\ a'x + b'y & = & c' \end{array} \right.$$

Classificació

$$\begin{cases} \text{Sistema compatible} \begin{cases} \text{Determinat } (\exists!\ \text{solució}) \\ \text{Indeterminat } (\exists\ \infty\ \text{solucions}) \end{cases} \\ \text{Sistema incompatible } (\nexists\ \text{solució}) \end{cases}$$

Sistemes d'equacions lineals

Exemple 1. Sistema compatible determinat

$$\begin{cases} x+y &= 3 \\ x-y &= 1 \end{cases}$$

Fem servir el mètode de reducció. Al sumar les equacions obtenim:

$$2x = 4 \quad \Rightarrow x = 2$$

Restant les equacions:

$$2y = 2 \quad \Rightarrow y = 1$$

Hem obtingut *una* solució que consta de dos nombres perque teníem dues incògnites. El sistema és compatible determinat.

Sistemes d'equacions lineals

Exemple 2. Sistema compatible indeterminat

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & 4 \\ x + y & = & 2 \end{array} \right.$$

Per aplicar reducció multipliquem la segona equació per 2. Al restar les equacions queda la identitat

$$0 = 0$$

Com que ha quedat una expresió certa que no depén de les incògnites, el sistema és compatible indeterminat, té infinites solucions.

Sistemes d'equacions lineals

Exemple 3. Sistema incompatible

$$\begin{cases} x+y & = & 4 \\ x+y & = & 3 \end{cases}$$

Al restar les equacions queda l'expresió

$$0=1$$

Com que ha quedat una expresió falsa que no depén de les incògnites, el sistema és incompatible, no té cap solució.

Interpretació geomètrica

- L'equació d'una recta al pla $\mathbb{R}^2$ es pot escriure com $ax + by + c = 0$ de forma que podem interpretar les solucions d'un sistema d'equacions com els punts de tall de dues rectes. D'aquesta manera:
  1. Sistema compatible determinat, solució única $\Rightarrow$ les rectes es tallen en un punt, de coordenades els valors x, y trobats.
  2. Sistema compatible indeterminat, infinites solucions $\Rightarrow$ les rectes es tallen en infinits punts, és a dir, són coincidents.
  3. Sistema incompatible, no hi ha cap solució $\Rightarrow$ les rectes són paral·leles.

Sistemes d'equacions no lineals

Definició

Un sistema d'equacions no lineals és un sistema on apareixen equacions de grau més gran que 1. Per resoldre aquests sistemes no hi ha una manera estàndar de procedir, per tant mostrarem algún exemple.

Exemple 1

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 202 \\ x+y & = & 20 \end{array}\right.$$

Aïllem una incògnita de l'equació lineal, per exemple la y, $y=20-x$, i substituim a l'altre equació.

$$x^2+(20-x)^2=202$$

Sistemes d'equacions no lineals

Exemple 1

$$\begin{aligned} x^2 + (20-x)^2 &= 202 \\ x^2 + 400 - 40x + x^2 &= 202 \\ 2x^2 - 40x + 198 &= 0 \\ x^2 - 20x + 99 &= 0 \end{aligned}$$

Amb solucions $x_1 = -9 \Rightarrow y_1 = 29,\ x_2 = -11 \Rightarrow y_2 = 31$

Sistemes d'equacions no lineals

Exemple 2

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 27 \\ x^2-y^2 & = & 23 \end{array}\right.$$

Al sumar les equacions obtenim: $2x^2 = 50$ d'on $x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$
Al restar: $2y^2 = 4$ d'on $y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

Inequacions

Definició

Una inequació és una desigualtat formada per dues expressions algebraiques separades per un dels signes: $>$, $<$, $\leq$, $\geq$. La solució és el conjunts de valors que satisfan la desigualtat.

Exemple 1. Inequació de primer grau amb una incògnita

$$2 - x < 5 \implies -x < 3 \implies x > -3$$

Atenció!

Fixeu-vos que, al multiplicar per un nombre negatiu, cal donar la volta al símbol de la desigualtat.

Exemple 2. Inequació de segon grau amb una incògnita

$$x^2 - x + 4 \geq 5x - 4$$
$$x^2 - 6x + 8 \geq 0$$

Factoritzem el polinomi $(x-2)(x-4) \geq 0$

$$\text{D'on} \begin{cases} \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow \ x \in [4, \infty) \\ \\ \begin{cases} x-2 \leq 0 \\ x-4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow \ x \in (-\infty, 2] \end{cases}$$

Exemple 3. Inequació amb fraccions

$$\frac{x+3}{x-5} \leq 0$$

$$\text{D'on} \begin{cases} \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x < 5 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3, 5) \\ \\ \begin{cases} x+3 \leq 0 \\ x-5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x > 5 \end{cases} \Rightarrow \nexists x \end{cases}$$