Matemàtiques Primer Batxillerat

Artur Arroyo

curs 2009-10

Matemàtiques primer batxillerat

Mesura d'angles

Sistemes de mesura d'angles

En trigonometria, per mesurar els angles es fan servir tres unitats de mesura d'angles que donen lloc als sistemes:

- sexagessimal,
- centessimal,
- circular.

Sistema sexagessimal

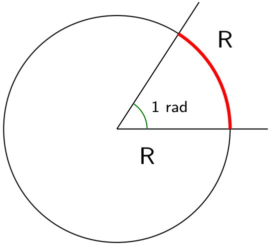
El sistema *sexagessimal* divideix la circumferència en 360 graus, cada grau en 60 minuts i cada minut en 60 segons. Llavors, per exemple, un angle de 54 graus, 34 minuts i 26 segons l'escriurem $54^\circ 34' 26''$. Les calculadores identifiquen aquest sistema amb la tecla *DEG*.

Sistema centessimal

El sistema *centessimal* divideix la circumferència en 400 graus, cada grau en 100 minuts i cada minut en 100 segons. D'aquesta manera, un angle de 86 graus, 26 minuts i 84 segons s'escriu $86^g 2684$. Aquest sistema angular es fa servir típicament en aplicacions geodèsiques per la seva major precissió. Les calculadores identifiquen aquest sistema amb la tecla *GRA*.

Sistema circular

El sistema circular pren com a unitat de mesura el *radian* i és la unitat escollida per mesurar angles en el Sistema Internacional d'unitats i mesures. La circumferència queda dividida en 2π radians. Les calculadores identifiquen aquest sistema amb la tecla *RAD*.



Donada una circumferència de radi R, anomenem *radian* l'angle tal que defineix un arc de la mateixa longitud que el radi de la circumferència.
L'equivalència entre radians i angles sexagessimals és

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

Exemple de conversió d'angles

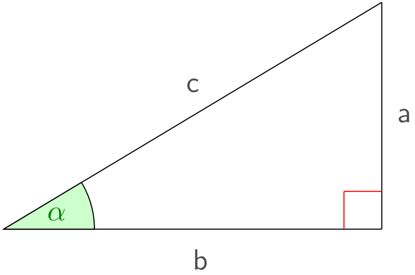
- Per passar 30° a radians fem:

$$30^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}\text{rad}$$

- Per passar $\frac{3\pi}{2}$ radians a graus sexagessimals fem:

$$\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 270^\circ$$

Raons trigonomètriques d'un angle agut



En el triangle rectangle es defineixen les raons trigonomètriques de l'angle α de la forma:

- $\sin\alpha = \dfrac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$

Altres raons trigonomètriques

Definició

A partir del sinus i el cosinus d'un angle es defineixen les següents raons trigonomètriques:

La tangent de α

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

La cotangent de α

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

La secant de α

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

La cosecant de α

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Relacions entre raons trigonomètriques

Una relació fonamental en trigonometria és la que lliga el sinus i el cosinus d'un angle qualsevol:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

a partir d'ella, dividint per $\sin^2\alpha$, obtenim

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

és a dir

$$1 + \mathrm{cotg}^2\alpha = \mathrm{cosec}^2\,\alpha$$

I si dividim ara per $\cos^2\alpha$, obtenim

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

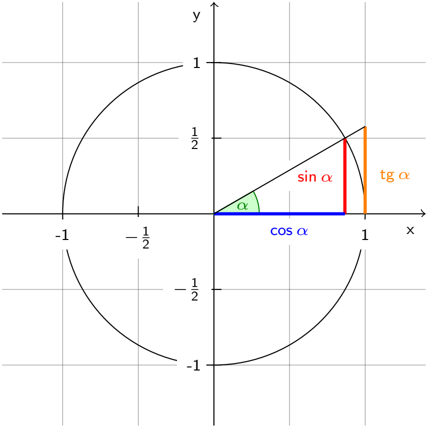
que es pot escriure com

$$\mathrm{tg}^2\alpha+1=\sec^2\alpha$$

Atenció!

Cal tenir clar que quan escrivim $\sin^2\alpha$ volem dir $(\sin\alpha)^2$. Convé especialment no confondre $\sin^2\alpha$ amb $\sin\alpha^2$.

La circumferència goniomètrica



La circumferència goniomètrica és una circumferència de radi 1 que es fa servir per estudiar les raons trigonomètriques dels angles. Donat un angle α, el sinus de α és l'alçada de la línea vermella. El cosinus de α és la mesura de la línea de color blau. La tangent de α apareix també representada en el dibuix.

Raons trigonomètriques de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°

És imprescindible conèixer les següents raons trigonomètriques:

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Exemple

Sabent que $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i que $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, calcular les altres raons trigonomètriques. Comencem aplicant la fòrmula

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

per trobar el $\cos\alpha$,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \tag{1}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \tag{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25} \tag{3}$$

Exemple

De manera que

$$\cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

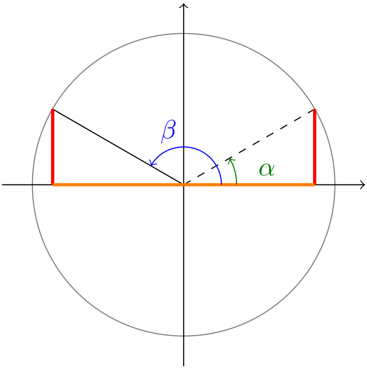
per triar el signe correcte, hem de recordar que l'angle està al segon quadrant, de forma que tenim

$$\cos \alpha = -\frac{16}{25}$$

i ara és immediat escriure

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{3}{4},\ \mathrm{cotg}\alpha = -\frac{4}{3},\ \sec \alpha = -\frac{5}{4},\ \mathrm{cosec}\alpha = \frac{5}{3}$$

Reducció d'angles del segon al primer quadrant



Per tot angle β del segon quadrant, hi ha un altre angle α al primer, de forma que es compleix

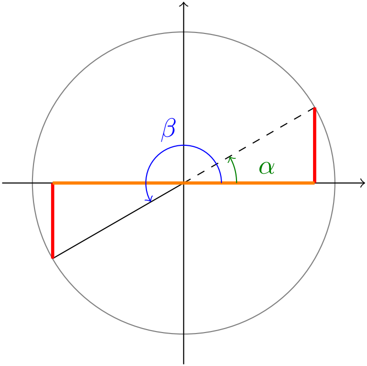
- $\sin\alpha = \sin\beta$
- $\cos\alpha = -\cos\beta$

A partir de la figura és clar que

$$\alpha + \beta = \pi$$

Aquests angles s'anomenen *suplementaris*.

Reducció d'angles del tercer al primer quadrant



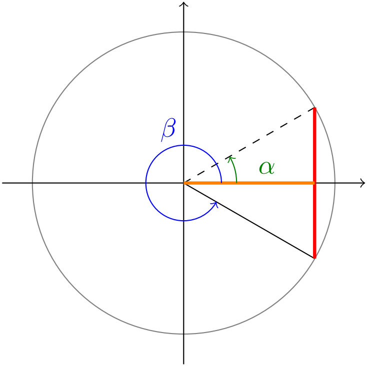
Per tot angle β del tercer quadrant, hi ha un altre angle α al primer, de forma que es compleix

- $\sin\alpha = -\sin\beta$
- $\cos\alpha = -\cos\beta$

A partir de la figura és clar que

$$\beta = \pi + \alpha$$

Reducció d'angles del quart al primer quadrant



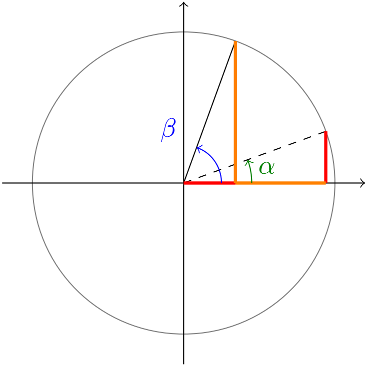
Per tot angle β del quart quadrant, hi ha un altre angle α al primer, de forma que es compleix

- $\sin\alpha = -\sin\beta$
- $\cos\alpha = \cos\beta$

A partir de la figura és clar que

$$\beta + \alpha = 2\pi$$

Angles complementaris



Els angles complementaris són aquells que sumen $\frac{\pi}{2}$ i la relació que hi ha entre les seves raons trigonomètriques és

- $\sin\alpha = \cos\beta$
- $\cos\alpha = \sin\beta$

Fòrmules trigonomètriques

De les moltes fòrmules trigonomètriques que existeixen, aquí només comentarem les que es fan servir en algun moment del batxillerat en altres matèries.

Fòrmules de l'angle doble i pas de suma a producte

Es fan servir a cinemàtica i al tractar el moviment ondulatori.

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right)$
- $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right)$

Equacions trigonomètriques

Les equacions trigonomètriques es poden presentar en una gran varietat de formes, de forma que calen mètodes prou diferents per resoldre-les. En general el que cal fer és transformar l'equació de forma que aparegui una sola raó trigonomètrica i un sol angle.

Exemple

Resoldre l'equació $\cos x + \cos 2x = 0$. En aquest cas d'entrada tenim una sola raó trigonomètrica a l'equació, però hi ha angles diferents, de forma que hem d'escriure:

$$\cos x + \cos 2x = 0$$
$$\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

Exemple

I, fent servir $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ podem escriure l'equació de manera que només hi aparegui el cosinus.

$$\cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

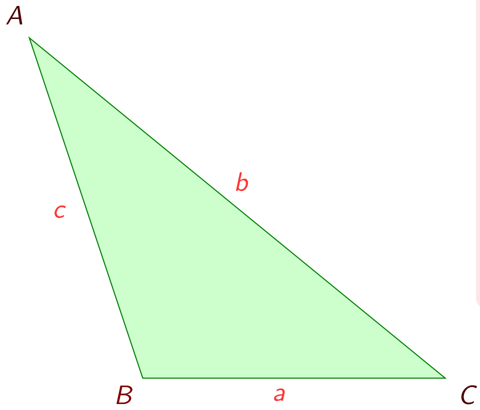
de forma que

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Resolució de triangles



En qualsevol triangle pla es compleix

- Teorema del sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

- Teorema del cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$$

- $A + B + C = 180^\circ$

Procediment general per resoldre triangles

Resoldre un triangle és trobar el valor dels seus angles i costats. Per poder resoldre un triangle hem de conèixer tres elements del triangle que no siguin els tres angles. Llavors:

- Si només coneixem un angle i no coneixem el corresponent costat oposat haurem d'aplicar el teorema del cosinus per trobar un altre angle.
- Si coneixem dos angles, sempre podem trobar el tercer i després aplicar el teorema del sinus.

Exemple 1

Resoldre el triangle: $a = 8cm,\ c = 7cm,\ B = 50^\circ$

Apliquem el teorema del cosinus al costat b,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$b^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7\cos 50^\circ$$

$$b = \sqrt{40,98} = 6,4cm$$

Exemple 1

Ara el teorema del sinus s'escriu

$$\frac{8}{\sin A} = \frac{6}{\sin 50^\circ} = \frac{7}{\sin C}$$

d'on

$$\sin A = \frac{8}{6} \sin 50^\circ$$

$$A = 73,25^\circ$$

$$C = 180^\circ - (50^\circ + 73,25^\circ) = 56,75^\circ$$

Exemple 2

Resoldre el triangle: $A = 62^\circ,\ B = 47^\circ,\ c = 9cm$

Primer trobem l'angle que falta

$$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (62^\circ + 47^\circ) = 71^\circ$$

Ara podem aplicar el teorema del sinus

$$\frac{a}{\sin 62^\circ} = \frac{b}{\sin 47^\circ} = \frac{9}{\sin 71^\circ}$$

Exemple 2

d'on

$$a = \frac{\sin 62^\circ}{\sin 71^\circ} 9 = 8,4cm, \quad b = \frac{\sin 47^\circ}{\sin 71^\circ} 9 = 6,95cm$$

Consideracions finals

Amb aquests exemples que hem vist, cobrim pràcticament totes les possibilitats. Malgrat això, en algun cas pot ser que no es pugui trobar solució o que n'hi hagi dues diferents.