Matemàtiques Primer Batxillerat

Artur Arroyo

curs 2009-2010

Matemàtiques primer batxillerat

Espais vectorials

Definició

Un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ és un conjunt E que té dues operacions

1. la *suma* de vectors, donats $\vec{u}, \vec{v} \in E$ qualssevol, $\vec{u} + \vec{v} \in E$,
2. el *producte per escalars* per tot $\vec{u} \in E$ i per tot $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{u} \in E$

Els elements d'E s'anomenen *vectors*. Sovint es trien lletres gregues $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \ldots)$ pels escalars i lletres llatines pels vectors.

Exemples d'espais vectorials

1. Els nombres reals $\mathbb{R}$ són un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$
2. L'espai de les funcions contínues reals de variable real, $\mathcal{F}(x)$
3. Les equacions lineals en les variables $x_1, \ldots, x_n$

Vectors lliures a $\mathbb{R}^2$

El conjunt dels vectors lliures de dimensió 2 és un $\mathbb{R}$-espai vectorial que podem anomenar $\mathcal{V}^2$ però que sovint confondrem deliberadament amb $\mathbb{R}^2$, que es un conjunt de punts. Sobre aquest conjunt $\mathcal{V}^2$, s'ha definit una relació d'equivalència de forma que considerarem dos vectors iguals si són paral·lels, del mateix sentit i mòdul. Com a representant canònic de cada classe d'equivalència prendrem el vector que comença a l'origen de coordenades.

Exemple

Donats els punts $A = (2, -3)$, $B = (3, -1)$, $C = (-4, 0)$ i $D = (-3, 2)$, els vectors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ són equivalents. Es comprova calculant les seves components.

Depèndencia i independència lineal de vectors

Definició

Diem que un conjunt de vectors és *linealment dependent* si algun d'ells es pot escriure com a combinació lineal dels altres. Si cap d'ells es pot escriure com a combinació lineal dels altres direm que són *linealment independents*.

Proposició

Dos vectors són linealment dependents sii un d'ells és múltiple de l'altre.

Sistema de generadors

Definició

Un *sistema de generadors* és un conjunt de vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n$ tals que qualsevol vector $\vec{v}$ es pot escriure com a combinació lineal

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n$$

per alguns escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Exemple

Els vectors $\vec{u}_1 = (1, -2)$, $\vec{u}_2 = (2, 3)$, $\vec{u}_3 = (3, 7)$ són un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$ (en realitat de $\mathcal{V}^2$).

Base d'un espai vectorial

Definició

Diem que un conjunt de vectors és base d'un espai vectorial quan són sistema de generadors i alhora, linealment independents.

Proposició

Si un espai vectorial té una base amb n vectors, llavors totes les bases d'aquest espai vectorial tenen el mateix nombre n de vectors.

Definició

La *dimensió* d'un espai vectorial és el nombre de vectors que té qualsevol de les seves bases.

Exemples

- Els vectors
$$\vec{u}_1 = (1, 2),\ \vec{u}_2 = (3, -1)$$
són linealment independents i sistema de generadors (es deixa com a exercici comprovar-ho), per tant, són base de l'espai vectorial $\mathcal{V}^2$ (per abús del llenguatge, base de $\mathbb{R}^2$)
- Els vectors $\vec{u}_1 = (1, 2), \vec{u}_2 = (-1, 3), \vec{u}_3 = (7, 2)$ són sistema de generadors però no linealment independents, per tant, no són base.

Components d'un vector. Canvi de base

Definició

Sigui $\mathcal{V}^2$ i $\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2\}$ una base seva. Les *components* d'un vector $\vec{u} \in \mathcal{V}^2$ són el parell $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tals que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$$

Atenció!

Un cop fixada la base, les components d'un vector són úniques, però si canviem la base les components variaran.

Definició

La base anomenada *canònica*, de l'espai vectorial $\mathcal{V}^2$, és la formada pels vectors $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$

Exemple de canvi de base

En $\mathbb{R}^2$ el vector $\vec{v} = (2, -3)$ s'expressa com a combinació lineal dels vectors de la base canònica com

$$\vec{v} = (2, -3) = 2\vec{e}_1 + (-3)\vec{e}_2 = 2(1, 0) + (-3)(0, 1)$$

Busquem ara les components d'aquest vector en la base $\vec{u}_1 = (2, 3), \vec{u}_2 = (1, 4)$. Cal trobar λ_1, λ_2 tals que

$$(1, 4) = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$$

de forma que

$$(1, 4) = \lambda_1(2, 3) + \lambda_2(1, 4)$$

Canvi de base

que dóna lloc al sistema d'equacions

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 & = & 4 \end{cases}$$

que té com a solució

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1$$

de manera que les components del vector $\vec{v} = (2, -3)$ en la base formada pels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ són, respectivament, 1 i 0. Això ho podem sintetitzar en l'expressió

$$\vec{v} = (2, -3)_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}} = (1, 0)_{\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}}$$

La recta en el pla

Definició

Una recta és una varietat lineal de dimensió 1. Una recta queda determinada al donar un punt $P = (p_1, p_2)$ pel qual passa la recta i un vector (*anomenat director*), $\vec{u} = (u_1, u_2)$, que proporciona la direcció de la recta. A aquesta informació, un punt i un vector director de la recta, l'anomenarem la *determinació lineal* de la recta. Alternativament també podem determinar una recta mitjançant dos punts diferents pels quals passi, ja que llavors sempre podem trobar un vector que vagi d'un punt a l'altre i aquest vector és, automàticament, director de la recta.

Equacions de la recta

- Equació vectorial: $r \equiv (x, y) = (p_1, p_2) + \lambda(u_1, u_2)$
- Equacions paramètriques: $r \equiv \begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 \end{cases}$
- Equació contínua:

$$r \equiv \frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2}$$

- Equació general o implícita: $r \equiv Ax + By + C = 0$
- Equació explícita: $y = mx + n$. El nombre m, s'anomena *pendent* de la recta.
- Equació punt pendent: $y - p_1 = m(x - p_2)$
- Equació canònica: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Important

- A partir de l'equació implícita de la recta es pot considerar el vector $\vec{N} = (A, B)$, que resulta ser perpendicular a la recta. Aquest vector s'anomena vector *associat* de la recta i veurem que juga un paper molt important en geometria.
- L'equació canònica ens proporciona els punts de tall amb els eixos coordenats, de forma que la recta talla l'eix OX en el punt $(a, 0)$ i l'eix OY en el punt $(0, b)$
- El pendent m, de la recta, té una interpretació geomètrica en el sentit que si anomenem α l'angle que forma la recta amb l'eix OX, llavors es té

$$m = \tan \alpha$$

Càlcul de les equacions de la recta

Exemple

Les equacions de la recta r, que passa per $P = (1, 2)$ i té com a vector director $\vec{u} = (4, 5)$ són:

- Vectorial, $r \equiv (x, y) = (1, 2) + \lambda(4, 5)$
- Paramètriques, $r \equiv \begin{cases} x & = & 1 + 4\lambda \\ y & = & 2 + 5\lambda \end{cases}$
- Contínua
$$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5}$$
- Implícita $r \equiv 5x - 4y + 3 = 0$
- Explícita $y = \frac{5}{4}x + 3$

Les formes punt pendent i canònica es deixen com a exercici.

Posició relativa de dues rectes

Casuística

Dues rectes en el pla poden ser:

1. *Coincidents*, els vectors directors de les rectes són proporcionals i a més un punt qualsevol d'una de les rectes pertany a l'altre recta.
2. *Secants*, les rectes es tallen en un punt, (no necessàriament de forma perpendicular).
3. *Paral·leles*, els vectors directors de les rectes són proporcionals però les rectes no comparteixen cap punt.

Posició relativa de dues rectes

Per tal d'esbrinar la posició relativa de dues rectes d'equacions implícites $r_1 \equiv Ax + By + C = 0$, $r_2 \equiv A'x + B'y + C'z = 0$, resoldrem el sistema d'equacions:

$$\left\{ \begin{array}{c} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C'z = 0 \end{array} \right.$$

Aquest sistema pot tenir una sola solució (les rectes es tallen en un punt), infinites solucions (les rectes són coincidents) o cap solució (les rectes són paral·leles).

Problemes mètrics

1. Distància entre dos punts
2. Projecció ortogonal d'un punt sobre una recta
3. Distància entre punt i recta
4. Distància entre dues rectes
5. Angle entre dues rectes
6. Punt simètric respecte una recta

Per poder resoldre aquests tipus de problemes cal definir un producte entre vectors, anomenat *producte escalar*.

Definició

Donats dos vectors $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es defineix el producte escalar dels vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, de la següent manera

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Aquesta definició és la que dota a l'espai vectorial $\mathcal{V}^2$ d'una estructura mètrica, en aquest cas, plana. Altres definicions del producte escalar porten a les anomenades *geometries no-euclídees*.

Mòdul d'un vector

Una vegada definit el producte escalar, podem mesurar el mòdul d'un vector qualsevol. Donat $\vec{u} = (u_1, u_2)$ definim el seu mòdul $|\vec{u}|$ com

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Angle entre dos vectors

Donats dos vectors $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, definim l'angle que formen com

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}|}$$

Un consequència immediata de la definició d'angle entre dos vectors és que si aquests són perpendiculars el seu procucte escalar donarà zero i viceversa, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Exemple de càlcul d'angle entre vectors

Si $\vec{u} = (1, 2)$ i $\vec{v} = (2, -2)$, per trobar l'angle que formen hem de calcular les quantitats:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2) \cdot (2, -2) = 2 - 4 = -2$
- $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$

llavors

$$\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}\sqrt{8}} \Rightarrow \alpha = 108,4^\circ$$

Problemes mètrics típics I

- **Distància entre dos punts**: Donats dos punts $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$, per calcular la distància entre ells n'hi ha prou de calcular el mòdul del vector $\overrightarrow{PQ}$.
- **Projecció ortogonal d'un punt sobre una recta**: donats un punt P i una recta $r \equiv (P_r, \vec{u}_r)$ amb punt genèric P_r^g, per trobar la projecció ortogonal de P sobre r, n'hi ha prou de resoldre l'equació $\overrightarrow{P_r^g P} \cdot \vec{u}_r = 0$, per trobar el punt Q de la recta que és projecció ortogonal de P sobre ella.

Problemes mètrics típics II

- **Distància d'un punt a una recta**: donat un punt $P = (p_1, p_2)$ i una recta $r \equiv Ax + By + C = 0$, la distància, (mínima), entre ells es troba com la distància del punt P a la seva projecció sobre la recta. Alternativament, podem fer servir una fòrmula que, per la seva fàcil generalització a qualsevol dimensió, convé recordar,
$$d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
- **Distància entre dues rectes**: si les rectes es tallen o són coincidents, la seva distància és zero. Si són paral·leles, trobarem la seva distància com la distància d'un punt qualsevol d'una d'elles a l'altre.

Problemes mètrics típics III

- **Angle entre dues rectes**: donades dues rectes amb determinació lineal $r \equiv (P, \vec{u})$, $s \equiv (Q, \vec{v})$, per trobar l'angle que formen, α, n'hi ha prou de trobar l'angle (agut) que formen els seus vectors directors, per tant:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}|}$$

- **Punt simètric respecte una recta**: donat un punt P i una recta r, per trobar el punt P', simètric de P respecte de r trobarem el punt Q, projecció ortogonal de P respecte de r, i demanarem que sigui $M_{PP'} = Q$.