Matemàtiques Primer Batxillerat

Artur Arroyo

curs 2009-2010

Matemàtiques primer batxillerat

Equació general

Definició

La circumferència és el lloc geomètric dels punts del pla que estan a la mateixa distància (anomenada *radi*) d'un punt fix anomenat *centre*. L'equació de la circumferència de centre (a, b) i radi R és

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

Si la desenvolupem

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-R^2=0$$

que té la forma

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

Si comparem l'expressió anterior amb la de partida podem fer les identificacions

$$\begin{cases} m = -2a \\ n = -2b \\ p = a^2 + b^2 - R^2 \end{cases}$$

especialment útils per trobar el centre i el radi d'una circumferència a partir de l'equació general.

Atenció!

No tota expressió de la forma

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

descriu una circumferència.

Exemple

Donada l'equació $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$, trobar el centre i radi. Escrivim:

$$\left\{ \begin{array}{l} -6 = -2a \\ 4 = -2b \\ 4 = a^2 + b^2 - R^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -2 \\ R^2 = a^2 + b^2 - 4 = 9 + 4 - 4 = 9 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow R = 3$$

Per tant el centre és el punt $(3, -2)$ i el radi val 3.

Posició relativa de recta i circumferència

Una recta $r \equiv Ax + By + C = 0$ i una circumferència $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ poden tallar-se en dos, un o cap punt. Tot dependrà del valor del discriminant de l'equació de segon grau obtinguda al resoldre el sistema format per la circumferència i la recta.

Exemple

Trobar la posició relativa de la recta $y = 2x + 1$ i la circumferència $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 3 = 0$. Resolem:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 2y - 3 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

per obtenir

$$x^2 + (2x + 1)^2 - 8x + 2(2x + 1) - 3 = 0$$

Exemple (continuació)

equació que s'escriu

$$x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - 8x + 4x + 2 - 3 = 0$$

és a dir

$$5x^2 = 0$$

obtenim dues solucions iguals $x = 0 \Rightarrow y = 1$ de forma que la recta talla la circumferència en un sol punt (és tangent), el punt és el $(0, 1)$

Posició relativa de dues circumferències

Eix radical de dues circumferències

Donades dues circumferències $\mathcal{C}_1 \equiv x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, $\mathcal{C}_2 \equiv x^2 + y^2 + m'x + n'y + p' = 0$ Anomenem *eix radical* a la recta que està a la mateixa distància dels centres de les dues circumferències. Aquesta recta s'obté sense més que restar les equacions de les circumferències. En el cas que ens ocupa obtenim $(m - m')x + (n - n')y + p - p' = 0$.

Per trobar la posició relativa de dues circumferències $\mathcal{C}_1 \equiv x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, $\mathcal{C}_2 \equiv x^2 + y^2 + m'x + n'y + p' = 0$ el que farem és obtenir a partir d'elles el seu eix radical, i després buscarem la posició relativa d'aquesta recta amb qualsevol de les dues circumferències.

Exercicis típics

- Trobeu l'equació d'una circumferència $\mathcal{C}$ sabent el seu centre, $P = (2, -3)$ i que la recta $r \equiv x + y - 3 = 0$ és tangent a ella.

Resolució

Com que la recta és tangent a la circumferència, n'hi ha prou de calcular la distància del centre a la recta per trobar el radi de la circumferencia. Així

$$R = d(r, P) = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} \equiv (x-2)^2 + (y+3)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

Exercicis típics

- Trobeu l'equació d'una circumferència $\mathcal{C}$ sabent que passa per tres punts, $P = (3, 0)$, $Q = (1, 2)$ i $R = (5, -2)$.

Resolució

Farem servir la propietat que les mediatrius relatives als segments PQ i QR es tallen al centre de la circumferència. Així

$$med_{PQ} \equiv y = -x + 3, \; med_{QR} \equiv y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$med_{PQ} \cap med_{QR} = (1, 2)$$

Un cop tenim el centre de la circumferència, $C = (1, 2)$ el radi el podem trobar calculant la distància del centre a qualsevol dels punts P, Q, R. Llavors, $R = d(P, C) = |\overrightarrow{PC}| = 2\sqrt{2}$