Aplicacions de la derivada

Creixement i decreixement (monotonia)

- Diem que una funció és **creixent** en un punt $x = x_0$ si es compleix
$$f'(x_0) > 0$$
- Diem que una funció és **decreixent** en un punt $x = x_0$ si es compleix
$$f'(x_0) < 0$$

Exemple 1. Determineu els intervals de monotonia d'aquestes funcions

1. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$
2. $g(x) = \frac{1}{x}$

Pel primer exemple tenim

$$f'(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

observem que es té

$$f'(x) < 0, \quad x \in (-1, 2)$$
$$f'(x) > 0, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$$

de forma que la funció és decreixent a l'interval $(-1, 2)$ i decreixent fora d'ell.

Al segon exemple la funció resulta ser decreixent en tot el seu domini ja que

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \quad \forall x \neq 0$$

Extrems relatius

Sigui x_0 solució de l'equació $f'(x) = 0$ i sigui n l'ordre de la primera derivada no nul·la de $f(x)$. Aleshores:

$$\begin{cases} n \quad \text{parell} \begin{cases} f^n(x_0) > 0 \Rightarrow \textsf{mínim en } x_0 \\ f^n(x_0) < 0 \Rightarrow \textsf{màxim en } x_0 \end{cases} \\ \\ n \quad \text{senar} \begin{cases} f^n(x_0) > 0 \Rightarrow \textsf{creixent en } x_0 \\ f^n(x_0) < 0 \Rightarrow \textsf{decreixent en } x_0 \end{cases} \end{cases}$$

Exemple 2. Determineu els extrems relatius de les funcions

1. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$
2. $g(x) = \frac{1}{x}$
3. $h(x) = x^5$

Per la funció $f(x)$ tenim

$$0 = f'(x) = (x+1)(x-2)$$

de forma que els valors *candidats (o punts crítics)* a que en ells hi hagi un extrem relatiu (màxim o mínim) són $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, calculem $f''(x)$ i l'avaluem en cadascun dels punts crítics

$$f''(x) = 2x - 1$$

$$f''(-1) = -3 < 0, \quad f''(2) = 3 > 0$$

hi ha un màxim relatiu al punt de coordenades $(-3, f(-3))$ i un mínim relatiu a $(2, f(2))$.

Respecte a $g(x)$

$$0 = g(x) = \frac{-1}{x^2}$$

com aquesta equació no té solució real la conclusió és que la funció no té extrems relatius i en conseqüència la seva monotonia no canviarà. Abans hem vist que era decreixent en tot el seu domini.

En quant a $h(x)$,

$$0 = h'(x) = 5x^4$$

amb solució $x = 0$, llavors

$$h''(x) = 20x^3, \quad h'''(x) = 60x^2, \quad h^{\mathrm{iv}}(x) = 120x, \quad h^{\mathrm{v}}(x) = 120$$

de forma que la primera derivada no nul·la al avaluar en $x = 0$ és la cinquena. Llavors, la funció $h(x)$ no té extrems relatius i manté la seva monotonia (en particular és creixent en tot $\mathbb{R}$)

Curvatura. Punts d'inflexió.

Sigui x_0 una solució de l'equació $f''(x) = 0$ i sigui n l'ordre de la primera derivada, $n \neq 1$, no nul·la. Aleshores

$$\begin{cases} n \quad \text{parell} \begin{cases} f^n(x_0) > 0 \Rightarrow \textsf{convexa en } x_0 \\ f^n(x_0) < 0 \Rightarrow \textsf{còncava en } x_0 \end{cases} \\ \\ n \quad \text{senar} \Rightarrow \textsf{punt d'inflexió} \end{cases}$$

Exemple 3. Donada $f(x) = (1 + x^2)$ es té que

$$0 = f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2}$$

$$-2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f'''(x) = \frac{4x^3 - 12x}{(1 + x^2)^2}$$

$$f'''(1) \neq 0, \ f'''(-1) \neq 0$$

de forma que els punts (1,f(1)) i (-1,(f(-1)) són punts d'inflexió de la funció.

A part del ja vist, també trobarem punts d'inflexió en aquells valors x_0 tals que $f''(x_0) = \pm\infty$.

Exemple 4. Donada $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ tenim que

$$f''(x) = \frac{-4}{9\sqrt[3]{(2x-1)^5}}$$

que no existeix per $x = \frac{1}{2}$ de manera que en aquest valor de x la funció té un punt d'inflexió. Noteu que el signe de $f''(x)$ canvia al voltant de $x = \frac{1}{2}$ de forma que la curvatura de la funció canvia éssent la funció convexa en l'interval $(\frac{1}{2}, \infty)$ i còncava en l'interval $(-\infty, \frac{1}{2})$.

Optimització de funcions

En aplicacions pràctiques molt diverses pot ser necessari trobar els extrems relatius de funcions de vàries variables, llavors seguirem el següent procediment:

- **1r** Escriure la funció a optimitzar en funció de tantes variables com calgui, suposem n.
- **2n** Trobar $n-1$ relacions entre les n variables. Aquestes relacions s'han d'extreure de l'enunciat, poden ser relacions geomètriques o d'altra mena.
- **3r** Fer servir les relacions trobades per reescriure la funció original en funció d'una sola variable.
- **4t** Buscar els extrems rellevants pel problema a resoldre.