Matemàtiques Segon Batxillerat

Artur Arroyo

curs 09-10

Matemàtiques segon batxillerat

Definició de matriu

Definició

Una matriu de *m files i n columnes* és una taula de $m \times n$ nombres *ordenats* de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El subíndex i indica la fila i el j la columna que ocupa cada element a_{ij} de la matriu i sovint, es pot representar la matriu per (a_{ij}).

Dimensió d'una matriu

Donada una matriu de *m files i n columnes* direm que la matriu és de dimensió $m \times n$.

Exemple

La matriu

$$M = \begin{pmatrix} -7 & \frac{3}{5} & 0 \\ 11 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

té dimensió 2×3, té dues files i tres columnes.

Matrius iguals

Direm que dues matrius A i B són iguals si i només si tenen la mateixa dimensió i, a més, els elements coincideixen terme a terme. Dit d'una altra manera

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$$

Classificació de matrius

- Una matriu fila és aquella que té com a dimensió $1 \times n$.
- Una matriu columna és una matriu que té com a dimensió $m \times 1$.
- Una matriu zero és aquella en la qual tots els elements són zero.
- Una matriu quadrada és aquella que té el mateix nombre de files que de columnes. La seva dimensió és $n \times n$ i direm que la matriu és d'ordre n.

Exemples

Siguin: $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Llavors, A és una matriu fila, B és una matriu columna i C és una matriu nul·la o zero de dimensió 3×2.

Tipus de matrius quadrades

Diagonal principal

La diagonal principal d'una matriu està formada pels elements a_{ii} de la matriu, és a dir, el a_{11}, el a_{22}, el a_{33}, etc.

Segons els elements que la formen, una matriu pot ser:

- Matriu triangular superior: tots els elements situats per sota de la diagonal principal són zero.
- Matriu triangular inferior: tots els elements situats per sobre de la diagonal principal són zero.
- Matriu diagonal: tots els elements de la matriu són zero llevat dels de la diagonal principal.
- Matriu identitat o unitat: és una matriu diagonal en la que a més els elements de la diagonal principal són 1.

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Llavors, A és una matriu diagonal, B és la matriu identitat d'ordre 2, que també s'escriu (Id_2), i C és una matriu triangular inferior.

Suma de matrius

Definició

La suma de dues matrius $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ dóna com a resultat una altra matriu C que té per elements $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemple

Donades $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

llavors $A + B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Atenció!

No és possible sumar dues matrius de dimensions diferents.

Propietats de la suma de matrius

Les propietas que té l'operació suma de matrius són

1. Commutativa: $A + B = B + A$
2. Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. Element neutre: l'element neutre respecte la suma de matrius és la matriu zero de la dimensió corresponent. $A + 0 = A$
4. Element oposat: l'element oposat (o invers respecte la suma) d'una matriu A és la matriu que té tots els elements iguals que A però amb el signe canviat. La matriu oposada de A s'escriu $-A$.

Aquesta darrera propietat ens permet, en particular, restar dues matrius de la següent manera $A - B = A + (-B)$.

Producte d'una matriu per un nombre real

Definició

El producte d'una matriu A per un nombre real α (també anomenat *escalar*), dóna com a resultat una matriu B de la mateixa dimensió que A amb elements $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Exemple

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, i $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$ tenim

$\alpha_1 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 10 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix}$, i

$\alpha_2 \cdot A = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -15 \\ 0 & -3 & -21 \end{pmatrix}$

Propietats del producte d'un escalar per una matriu

1. Distributiva respecte la suma de matrius:
   $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
2. Distributiva respecte la suma d'escalars:
   $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

Les matrius formen un $\mathbb{R}-$espai vectorial

És clar, ja que si considerem el conjunt de les matrius de dimensió $m \times n$, fixada, $\mathcal{M}_{m\times n}$ tenim:

- $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}, \quad A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \cdot A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

Producte de matrius

Definició

El producte d'una matriu A, de dimensió $m \times n$ per una matriu B, de dimensió $n \times p$, és una altra matriu C de dimensió $m \times p$, l'element c_{ij} de la qual l'obtenim multiplicant la fila i-èssima de la primera matriu per la columna j-èssima de la segona matriu.

Exemple

Donades $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

veiem que es poden multiplicar i que el seu producte serà una matriu de dimensió 2×2.

Producte de matrius

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}}$$

Per calcular els c_{ij} ho farem pas a pas. El terme c_{11} ve de multiplicar la primera fila de la primera matriu per la primera columna de la segona matriu, com si es tractés del producte escalar de dos vectors

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 4 \cdot 1 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Producte de matrius

de forma que tenim

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

i de forma similar,

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Producte de matrius

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 2 & c_{22} \end{pmatrix}$$

i finalment,

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Propietats del producte de matrius

1. Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. Element neutre: si A té dimensions $m \times n$, llavors $Id_m \cdot A = A$ i $A \cdot Id_n = A$
3. Distributiva respecte el producte:
    1. per l'esquerra: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
    2. per la dreta: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

Atenció!

El producte de matrius en general no és commutatiu. D'entrada, per poder multiplicar dues matrius s'ha de complir la condició sobre les dimensions. Per una altra banda fins i tot matrius quadrades no commuten entre elles.

Exemple 1.

Siguin $\underset{m\times n}{A}$, $\underset{n\times r}{B}$, $\underset{r\times r}{C}$ i $\underset{r\times r}{D}$, llavors:

- els productes $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times r}{B}$, $\underset{n\times r}{B} \cdot \underset{r\times r}{C}$ i $\underset{r\times r}{C} \cdot \underset{r\times r}{D}$ estan ben definits.
- Els productes $\underset{n\times r}{B} \cdot \underset{m\times n}{A}$ i $\underset{r\times r}{C} \cdot \underset{n\times r}{B}$ no estan ben definits per qüestió de dimensions.

Exemple 2.

Finalment, en general $\underset{r\times r}{C} \cdot \underset{r\times r}{D} \neq \underset{r\times r}{D} \cdot \underset{r\times r}{C}$

Per exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mentre que

a l'inrevés $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Matriu transposada

Definició

Donada A matriu de dimensió $m \times n$, definim la seva transposada A^t, com la matriu de dimensió $n \times m$ que té per files les columnes de A.

Exemple

Amb $A = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$, llavors $A^t = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}$

Propietats de la matriu transposada

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot (A)^t$
4. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Cal recordar especialment l'ordre en que apareixen les matrius en la darrera propietat. El canvi es deu a la no commutativitat de les matrius.

Matrius simètriques i antisimètriques

Definició

- Diem que una matriu quadrada és *simètrica* si coincideix amb la seva transposada, $A = A^t$
- Diem que una matriu quadrada és *antisimètrica* si la seva oposada coicideix amb la seva transposada $-A = A^t$

Descomposició en matriu simétrica i antisimétrica

Sigui A matriu quadrada qualsevol, llavors sempre es pot trobar una descomposició de A com a suma d'una matriu simètrica i una altra antisimètrica.

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

Combinacions lineals de files en una matriu

Definició

Diem que una fila F_i no nul·la *depèn linealment* de les files $F_{j_1},\ F_{j_2}\dots F_{j_m}$ si se satisfà la igualtat:

$$F_i = \alpha_1 F_{j_1} + \alpha_2 F_{j_2} + \cdots + \alpha_m F_{j_m}$$

Diem que una fila és *linealment independent* si no depèn linealment de cap altra fila de la matriu.

Exemple

Si considerem la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Es pot comprovar fàcilment que $F_2 = 2F_1$, i per tant F_2 no és linealment independent. De la mateixa manera, $F_4 = F_1 + F_3$ de forma que F_4 tampoc és linealment independent, queden doncs, com a files linealment independents, F_1 i F_3.

Rang d'una matriu

Definició

El rang d'una matriu A, rang(A) és el nombre de files o de columnes linealment independents que té la matriu.

Per determinar el rang d'una matriu donada, en general ho farem sempre per files, i farem servir el que es coneix com a mètode de Gauss, que consisteix en convertir la matriu inicial en una que sigui triangular superior, és a dir, que tingui zeros a sota de la diagonal principal. Aquest procés es coneix com *triangular la matriu* i el rang de la matriu serà el nombre de files no nul·les que té la matriu triangulada.

Càlcul del rang d'una matriu

Hi ha certes transformacions permeses, anomenades *transformacions elementals*, que deixen invariant el rang d'una matriu. Aquestes són:

- Intercanviar dues files entre elles.
- Multiplicar una fila per un escalar
- Substituir una determinada fila per una combinació lineal d'altres.

Exemple 1.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ I per tant el rang és 2. Hem substituit la segona fila, F_2 per la combinació lineal $3F_1 - F_2$ i així queda triangulada la matriu. Noteu el símbol ($\sim$) que es fa servir per indicar que, tot i que les matrius **no** són iguals, tenen el mateix rang

Exemple 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ \color{red}{0} & -3 & 7 & -1 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu està triangulada i el rang és 2.

Matriu inversa

Motivació

Recordem com es resolen alguns tipus d'equacions molt senzill.

1. Per resoldre $x + 2 = 5$, sumarem a banda i banda l'invers de 2 respecte la suma, és a dir -2, i tenim $x + 2 - 2 = 5 - 2; x = 3$
2. Per resoldre $3x = 7$, multipliquem a banda i banda per l'invers de 3 respecte la multiplicació, és a dir $\frac{1}{3}3x = \frac{1}{3}7 \rightarrow x = \frac{7}{3}$
3. Llavors, per resoldre l'equació matricial $AX = B$, hauríem de multiplicar a banda i banda per la matriu inversa de A respecte de la multiplicació. En general aquesta matriu no existeix. D'entrada, només es poden trobar matrius inverses de matrius quadrades, i fins i tot no totes les matrius quadrades tenen inversa.

Definició

La matriu inversa d'una matriu quadrada A d'ordre n és una matriu quadrada que denotarem per A^{-1}, del mateix ordre, que satisfà:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

on I_n és la matriu identitat d'ordre n. Les matrius que tenen inversa s'anomenen *regulars* i les que que no, *singulars*. En el proper tema donarem una condició necessària i suficient per saber si una matriu donada es o no singular.