Matemàtiques Segon Batxillerat

Artur Arroyo

curs 2009-2010

Matemàtiques segon batxillerat

Sistema d'equacions lineals

Definició

Un sistema de m equacions lineals amb n incògnites es pot representar com:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right\}$$

Anomenem solució del sistema d'equacions lineals a qualsevol conjunt de valors que verifiqui totes les equacions del sistema.

Classificació dels sistemes d'equacions

Segons el nombre de solucions, anomenarem al sistema:

$$\begin{cases} \text{Sistema compatible} \begin{cases} \text{Determinat } (\exists! \text{ solució}) \\ \text{Indeterminat } (\exists\ \infty \text{ solucions}) \end{cases} \\ \text{Sistema incompatible } (\nexists \text{ solució}) \end{cases}$$

Forma matricial

Notem que un sistema de m equacions lineals amb n incògnites es pot escriure com un producte de matrius de la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

On A és la *matriu dels coeficients*, X la matriu de les incògnites i B la matriu dels termes independents.

Matriu ampliada

Definició

Anomenem *matriu ampliada*, A^*, del sistema, la matriu formada per la matriu de coeficients ampliada amb una columna, la dels termes independents.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Discussió de sistemes

Per tal de discutir les solucions que puguin tenir els sistemes d'equacions lineals farem servir el Teorema de Rouché-Fröbenius.

Teorema

La condició necessària i suficient perquè un sistema $A \cdot X = B$ tingui solució és que la matriu dels coeficients del sistema, A, i l'ampliada, A^*, tinguin el mateix rang. Si a més aquest rang és igual al número d'incògnites, n, llavors la solució és única.

Aplicació de Rouché-Fröbenius I

Per la matriu $A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ tenim que
rang(A_1)=rang(A_1^*) $= 3 \Rightarrow$ el sistema és compatible determinat.

Per la matriu $A_2^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ tenim que
rang(A_1) <rang(A_1^*) $\Rightarrow$ el sistema és incompatible.

Aplicació de Rouché-Fröbenius II

Per la matriu $A_3^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ tenim que

$\text{rang}(A_3)$=$\text{rang}(A_3^*) = 2 <$ nombre d'incògnites $\Rightarrow$ el sistema és indeterminat.

Per la matriu $A_4^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ tenim que

$\text{rang}(A_4) <\text{rang}(A_4^*) = 1 <$ nombre d'incògnites $\Rightarrow$ el sistema és indeterminat.

Atenció!

Noteu que l'aplicació del teorema de Rouché-Fröbenius depèn de que la matriu ampliada estigui correctament triangulada, i que hi ha dos graus d'indeterminació diferents, segons el rang sigui 1 ó 2. Al tema següent, quan tractem de la geometria a $\mathbb{R}^3$, podrem interpretar geomètricament aquesta diferència.

Regla de Cramer

Considerem el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array}\right\} \tag{1}$$

format per 3 equacions i 3 incògnites, a on suposem que la matriu dels coeficients A és regular, és a dir $|A| \equiv \Delta \neq 0$.

Tal com hem vist abans, aquest sistema es pot escriure de forma abreujada com

$$AX = B \tag{2}$$

on A és la matriu de coeficients i X, B són les matrius columna

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Per ser A regular existeix A^{-1}. Multiplicant per l'esquerra en (2) per A^{-1}, obtenim:

$$X = A^{-1}B \tag{3}$$

Els sistemes (2) i (3) són equivalents, és a dir, tenen les mateixes solucions. Si fem les operacions corresponents a (3) obtenim:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \equiv \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \equiv \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|} \equiv \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Atenció!

Al aplicar el mètode de Cramer a un sistema com el d'abans pot ser útil fer servir la següent notació. Al determinant de la matriu de coeficients l'anomenem Δ, i als altres Δ_x, Δ_y, Δ_z.

Exemple

Donat el sistema $\left.\begin{array}{rrr} 2x & -3y & +z = -2 \\ -2x & & -2z = 0 \\ 3x & -2y & -3z = 4 \end{array}\right\}$, tenim:

$$\Delta = 32, \quad \Delta_x = 32, \quad \Delta_y = 32, \quad \Delta_z = -32$$

De forma que

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = -1$$

Aplicació de Cramer a sistemes indeterminats

La regla de Cramer es pot aplicar a sistemes indeterminats

Exemple

Donat el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 2 \\ -2x + y - z = 1 \end{array}\right\}$$

podem parametritzar per la variable z i tenim

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y = 2 + z \\ -2x + y = 1 + z \end{array}\right\}$$

que es pot resoldre per Cramer per donar

$$x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{7 + 5z}{5}$$

Atenció

Noteu que en l'exemple anterior hem pogut parametritzar per la variable z perque el determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

que involucrava les altres variables, **no** era zero.
També podiem haver parametritzat per la variable y, ja que

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

però no per la variable x, ja que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

Sistemes homogenis

Definició

Diem que un sistema és homogeni si tots els termes independents són zero:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = 0 \end{array}\right\}$$

Aquests tipus de sistemes admeten trivialment la solució

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

Sistemes homogenis

D'aquesta forma, els sistemes homogenis sempre són compatibles. La condició per a que un sistema homogeni tingui altres solucions a part de la trivial o impròpia és que el rang de la matriu de coeficients sigui menor que el nombre d'incògnites.

Exemple

El sistema $\left.\begin{array}{rrrr} 2x & -3y & +z & = 0 \\ -2x & & -2z & = 0 \\ & -3y & -z & = 0 \end{array}\right\}$ és homogeni i el determinant de la matriu de coeficients val $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ per tant, és compatible indeterminat, té infinites solucions.

Sistemes amb paràmetres

Estudiem amb un exemple com discutir aquests tipus de sistemes.

Exemple

Donat el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x+y-z=\lambda \\ \lambda x+2y-z=3\lambda \\ 2x+\lambda y-z=6 \end{array}\right\}$$

Comencem calculant el determinant de la matriu de coeficients, A.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -\lambda^2+2\lambda = -\lambda(\lambda-2)$$

Exemple

De forma que tenim, que per

$$\lambda \neq \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

llavors $\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(A^*) = n \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.

Ara, per $\lambda = 0$, triangulant la matriu ampliada, obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 < 3 = \text{rang}(A^*) \Rightarrow$$

Sistema incompatible

Exemple

Ara, per $\lambda = 2$, triangulant la matriu ampliada, obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A^*) \Rightarrow$$

Sistema compatible indeterminat, que es resol per Cramer,

$$\left.\begin{array}{rcr} x + y - z & = & 2 \\ -z & = & -2 \end{array}\right\}$$

parametritzant per y, queda $x = 4 - y,\ z = 2$ de forma que les solucions es poden posar com $(4 - \lambda, \lambda, 2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$