# Matemàtiques Segon Batxillerat

Artur Arroyo

curs 2009-2010

# Matemàtiques segon batxillerat

# Espais vectorials

## Definició

Un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ és un conjunt $E$ que té dues operacions

1. la *suma* de vectors, donats $\vec{u}, \vec{v} \in E$ qualssevol, $\vec{u} + \vec{v} \in E$,
2. el *producte per escalars* per tot $\vec{u} \in E$ i per tot $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{u} \in E$

Els elements d'$E$ s'anomenen *vectors*. Sovint es trien lletres gregues $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \ldots)$ pels escalars i lletres llatines pels vectors.

## Exemples d'espais vectorials

1. Els nombres reals $\mathbb{R}$ són un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$
2. L'espai de les matrius $M_{m\times n}(\mathbb{R})$
3. Les equacions lineals en les variables $x_1, \ldots, x_n$

# Vectors lliures a $\mathbb{R}^3$

El conjunt dels vectors lliures de dimensió 3 és un $\mathbb{R}$-espai vectorial que podem anomenar $\mathcal{V}^3$ però que sovint confondrem deliberadament amb $\mathbb{R}^3$, que es un conjunt de punts. Sobre aquest conjunt $\mathcal{V}^3$, s'ha definit una relació d'equivalència de forma que considerarem dos vectors iguals si són paral·lels del mateix sentit i mòdul. Com a representant canònic de cada classe d'equivalència prendrem el vector que comença a l'origen de coordenades.

**Exemple**

Donats els punts $A = (2, -3, 5)$, $B = (3, -1, 8)$, $C = (-4, 0, 7)$ i $D = (-3, 2, 10)$, els vectors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ són equivalents. Es comprova calculant les seves components.

# Depèndencia i independència lineal de vectors

## Definició

Diem que un conjunt de vectors és *linealment dependent* i algun d'ells es pot escriure com a combinació lineal dels altres. Si cap d'ells es pot escriure com a combinació lineal dels altres direm que són *linealment independents*.

## Proposició

Dos vectors són linealment dependents sii un d'ells és múltiple de l'altre.

## Proposició

Tres vectors de $\mathcal{V}^3$ són linealment independents sii el determinant que formen és diferent de zero.

## Exemple

Donats $\vec{u}_1 = (2,5,1)$, $\vec{u}_2 = (3,-1,4)$, $\vec{u}_3 = (-1,6,-3)$, per decidir sobre la seva dependència o independència lineal calculem el determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 20 + 18 - 1 - 48 + 45 = 0$$

Per tant, són linealment dependents. En aquest exemple veiem que la dependència o independència lineal d'un conjunt de vectors depén només del rang de la matriu que formen.

## Observació

Donats 4 vectors de dimensió 3, és impossible que siguin linealment independents, perquè el rang màxim que pot tenir la matriu que formen és 3.

# Sistema de generadors

## Definició

Un *sistema de generadors* és un conjunt de vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ tals que qualsevol vector $\vec{v}$ es pot escriure com a combinació lineal

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n$$

per alguns escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

## Exemple

Els vectors $\vec{u}_1 = (1, -2), \vec{u}_2 = (2, 3), \vec{u}_3 = (3, 7)$ són un sistema de generadors de $\mathbb{R}^2$ (en realitat de $\mathcal{V}^2$).

# Base d'un espai vectorial

**Definició**

Diem que un conjunt de vectors és base d'un espai vectorial quan són sistema de generadors i alhora, linealment independents.

**Proposició**

Si un espai vectorial té una base amb $n$ vectors, llavors totes les bases d'aquest espai vectorial tenen el mateix nombre $n$ de vectors.

**Definició**

La *dimensió* d'un espai vectorial és el nombre de vectors que té qualsevol de les seves bases.

## Exemples

- Els vectors
$$\vec{u}_1 = (1, 2), \vec{u}_2 = (3, -1)$$
són linealment independents i sistema de generadors (es deixa com a exercici comprovar-ho), per tant, són base de l'espai vectorial $\mathcal{V}^2$ (per abús del llenguatge, base de $\mathbb{R}^2$)
- Els vectors
$\vec{u}_1 = (1, 2, 3), \vec{u}_2 = (-1, 3, 7), \vec{u}_3 = (7, 2, 5), \vec{u}_4 = (-2, 3, -5)$
són sistema de generadors però no linealment independents, per tant, no són base.

# Components d'un vector. Canvi de base

## Definició

Sigui $\mathcal{V}^3$ i $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base seva. Les *components* d'un vector $\vec{u} \in \mathcal{V}^3$ són la terna $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3$$

## Atenció!

Un cop fixada la base, les components d'un vector són úniques, però si canviem la base les components variaran.

## Definició

La base canònica de l'espai vectorial $\mathcal{V}^3$ és la formada pels vectors $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

## Exemple de canvi de base

En $\mathbb{R}^2$ el vector $\vec{v} = (2, -3)$ s'expressa com a combinació lineal dels vectors de la base canònica com

$$\vec{v} = (2, -3) = 2\vec{e}_1 + (-3)\vec{e}_2 = 2(1, 0) + (-3)(0, 1)$$

Busquem ara les components d'aquest vector en la base $\vec{u}_1 = (2, 3), \vec{u}_2 = (1, 4)$. Cal trobar $\lambda_1$, $\lambda_2$ tals que

$$(1, 4) = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$$

de forma que

$$(1, 4) = \lambda_1(2, 3) + \lambda_2(1, 4)$$

## Canvi de base

que dóna lloc al sistema d'equacions

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 & = & 4 \end{cases}$$

que té com a solució

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$$

de manera que les components del vector $\vec{v} = (2, -3)$ en la base formada pels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ són, respectivament, 1 i 0. Això ho podem sintetitzar en l'expressió

$$\vec{v} = (2, -3)_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}} = (1, 0)_{\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}}$$

# La recta a l'espai

## Definició

Una recta és una varietat lineal de dimensió 1. Una recta queda determinada al donar un punt $P = (p_1, p_2, p_3)$ pel qual passa la recta i un vector (*anomenat director*) $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ que proporciona la direcció de la recta. Alternativament també podem determinar una recta mitjançant dos punts diferents pels quals passi.

## Equacions de la recta

- Equació vectorial $r \equiv (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$
- Equacions paramètriques $r \equiv \begin{cases} x &= p_1 + \lambda u_1 \\ y &= p_2 + \lambda u_2 \\ z &= p_3 + \lambda u_3 \end{cases}$
- Equació contínua

$$r \equiv \frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2} = \frac{z - p_3}{u_3}$$

- Equacions implícites $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{cases}$

# Càlcul de les equacions de la recta

## Exemple

Les equacions de la recta $r$, que passa per $P = (1, 2, 3)$ i té com a vector director $\vec{u} = (4, 5, 6)$ són:

- Vectorial, $r \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 5, 6)$
- Paramètriques, $r \equiv \begin{cases} x &= 1 + 4\lambda \\ y &= 2 + 5\lambda \\ z &= 3 + 6\lambda \end{cases}$
- Contínua
$$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{6}$$
- Implícites $r \equiv \begin{cases} 5x - 4y + 3 &= 0 \\ 6x - 4z + 11 &= 0 \end{cases}$

## Parametrització d'una recta

Sovint caldrà conèixer un vector director i un punt d'una recta donada en forma implícita

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} Ax + By + Cz + D & = & 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' & = & 0 \end{array} \right.$$

en aquest cas sempre podem parametritzar per alguna variable, obtenint directament les equacions paramètriques de la recta.

## Exemple

La recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z + 4 & = & 0 \\ 5x + 6y + 7z + 8 & = & 0 \end{array} \right.$ es pot parametritzar per la variable $z$, ja que el determinant $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4$ és diferent de zero.

## Exemple

Llavors, les solucions del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & -4-3z \\ 5x+6y & = & -8-7z \end{array}\right.$$

s'obtenen directament pel mètode de Cramer

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} -4-3z & 2 \\ -8-7z & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}=\frac{-8-6z}{-4}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{12+8z}{-4}$$

$$(x,y,z)=(2+\frac{3}{2}\lambda,-3-2\lambda,\lambda)\Rightarrow P_r=(2,-3,0),\ \vec{v}_r=(3,-4,2)$$

# El pla a l'espai

## Definició

Un pla és una varietat lineal de dimensió 2. Un pla queda determinat per:

- un punt contingut en ell, $P = (p_1, p_2, p_3)$ i dos vectors linealment independents $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ continguts en el pla i que anomenarem *vectors directors* del pla,
- donar tres punts no col·lineals,
- donar un punt $P = (p_1, p_2, p_3)$ i un vector $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$ perpendicular al pla, que anomenarem vector *associat* al pla.

## Equacions del pla

- Equació vectorial
  $\pi \equiv (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$
- Equacions paramètriques $\pi \equiv \begin{cases} x & = & p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y & = & p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z & = & p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$
- Equació general o implícita $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

## Important!

El vector $(A, B, C)$ és d'especial rellevància donat que és perpendicular al pla i per tant, es pot prendre com a associat seu.

## Equació general del pla

L'equació general del pla s'obté d'imposar la condició

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & u_1 & v_1 \\ y - p_2 & u_2 & v_2 \\ z - p_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

que és equivalent a interpretar les equacions paramètriques del pla com un sistema d'equacions per $\lambda$ i $\mu$ i demanar que el rang de la matriu ampliada no valgui 3, per tal que tingui solució.

# Feix de plans

## Definició

Una construcció sovint molt útil consisteix a trobar el feix de plans generat per una recta, que els conté a tots ells. Donada la recta en forma implícita

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D & = & 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' & = & 0 \end{cases}$$

l'equació del feix de plans que genera ve donada per

$$\pi_\lambda \equiv (A + \lambda A')x + (B + \lambda B')y + (C + \lambda C')z + (D + \lambda D') = 0$$

# Posició relativa de dues rectes

## Casuística

Dues rectes en l'espai poden ser:

1. *Coincidents*, els vectors directors de les rectes són proporcionals i a més un punt qualsevol d'una de les rectes pertany a l'altre recta.
2. *Secants*, les rectes es tallen en un punt, (no necessàriament de forma perpendicular).
3. *Paral·leles*, els vectors directors de les rectes són proporcionals però les rectes no comparteixen cap punt.
4. *Creuades*, els vectors directors de les rectes no són proporcionals i les rectes no tenen cap punt en comú.

# Posició relativa de dues rectes

Per tal d'esbrinar la posició relativa de dues rectes d'equacions vectorials

$$r_1 \equiv (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$$

$$r_2 \equiv (x, y, z) = (q_1, q_2, q_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

podem procedir essencialment de dues formes:

- Si els vectors directors no són proporcionals, calculem el determinant

$$\begin{vmatrix} q_1 - p_1 & u_1 & v_1 \\ q_2 - p_2 & u_2 & v_2 \\ q_3 - p_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

  si el resultat és diferent de zero, les rectes es creuen. Si el resultat és zero, les rectes es tallen en un punt (i per tant estan contingudes en un pla).

- Si els vectors directors de les rectes són proporcionals, les rectes seran paral·leles o coincidents. Serà suficient mirar si comparteixen algún punt per decidir la qüestió.

Si sospitem que dues rectes es tallen, podem intentar trobar directament la seva intersecció resolent el sistema

$$\begin{cases} p_1 + \lambda u_1 & = & q_1 + \mu v_1 \\ p_2 + \lambda u_2 & = & q_2 + \mu v_2 \\ p_3 + \lambda u_3 & = & q_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Si té solució única, les rectes es tallen en un punt, de coordenades la solució obtinguda. Si té infinites solucions, les rectes són coincidents, i si és incompatible, les rectes, o bé es creuen, o són paral·leles si els seus vectors directors són proporcionals.

# Posició relativa de recta i pla

## Casuística

La posició relativa d'una recta i un pla en l'espai dóna lloc a les següents possibilitats:

1. *Recta i pla secants*, la recta talla al pla en un punt.
2. *Recta paral·lela al pla*, la recta és exterior al pla, no tenen cap punt en comú.
3. *Recta continguda al pla*, tots els punts de la recta pertanyen al pla.

Noteu que **no** és possible que la recta i el pla es creuin a l'espai $\mathbb{R}^3$.

# Posició relativa de recta i pla

Per tal de determinar la posició relativa d'una recta i un pla el que farem és substituïr les equacions paramètriques de la recta

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 \end{cases}$$

a l'equació del pla

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

de forma que obtindrem una equació lineal amb una incògnita (el paràmetre de la recta, $\lambda$). Segons les solucions d'aquesta equació sabrem la posició relativa.

# Posició relativa de recta i pla

## Exemple

1. Obtenim una equació del tipus $a\lambda = b$ amb $a \neq 0$. Llavors la recta talla al pla en un punt, les coordenades del qual es poden trobar substituïnt el valor trobat de $\lambda$ a les equacions paramètriques de la recta.
2. Obtenim una equació del tipus $a = a$, és a dir, una identitat que no depén de $\lambda$. Això vol dir que la recta està continguda al pla.
3. Obtenim una equació del tipus $a = 0$ amb $a \neq 0$. Això vol dir que la recta és exterior al pla, és a dir, paral·lela.

# Posició relativa de dos plans

## Casuística

Segons la seva posició relativa, dos plans poden:

1. *Ser paral·les*, els plans no tenen cap punt en comú.
2. *Ser coincidents*, els plans tenen tots els punts en comú.
3. *Secants*, els plans es tallen segons una recta.

Per tal de decidir quina és la situació n'hi ha prou de mirar si els vectors associats dels plans són proporcionals. Si ho són, els plans són coincidents (si tenen algun punt en comú) o paral·lels. Si els vectors associats dels plans no són proporcionals, llavors els plans es tallen segons una recta descrita implícitament per les dues equacions dels plans.

# Posició relativa de tres plans

En aquest cas la casuística és molt diversa. El que farem per tal de trobar la posició relativa de tres plans és mirar si dos d'ells formen una recta i buscar la posició relativa d'aquesta amb el pla restant. Si cap parella de plans forma una recta, llavors seran tots paral·lels i només caldrà veure si són exteriors o coincidents. Als exercicis es discutiran les configuracions geomètriques que resulten en cada cas.