Matemàtiques Segon Batxillerat

Artur Arroyo

curs 2009-2010

Matemàtiques segon batxillerat

Definició i aplicacions

Definició

Donats dos vectors $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definim el seu producte escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ com

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

aquesta definició dota a l'espai vectorial $\mathcal{V}^3$ presentat al tema anterior de l'estructura mètrica euclidea ordinària. Un cop definit un producte escalar en un espai vectorial, ens podem demanar quin és el mòdul d'un vector o quin angle formen dos vectors qualssevol.

Definicions

Mòdul i angle entre vectors

- Donat un vector $\vec{u}$, definim el seu mòdul $|\vec{u}|$ com

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + u_3 \cdot u_3} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

- Donats dos vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, l'angle que formen es troba mitjançant la fòrmula

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}|}$$

Un consequència immediata de la definició d'angle entre dos vectors és que si aquests són perpendiculars el seu procuct escalar donarà zero i viceversa, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Exemple

Si $\vec{u} = (1, 2, 3)$ i $\vec{v} = (-2, 1, 5)$, per trobar l'angle que formen hem de calcular les quantitats:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2, 3) \cdot (-2, 1, 5) = -2 + 2 + 15 = 15$
- $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$
- $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}$

llavors

$$\cos \alpha = \frac{15}{\sqrt{14}\sqrt{30}} \Rightarrow \alpha = 42,9^\circ$$

1. **Angles entre dues rectes**: donades dues rectes amb determinació lineal $r \equiv (P, \vec{u})$, $s \equiv (Q, \vec{v})$, per trobar l'angle que formen, α, n'hi ha prou de trobar l'angle (agut) que formen els seus vectors directors, per tant: $\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|}$
2. **Angle entre recta i pla**: donada una recta $r \equiv (P, \vec{u})$ i un pla d'equació $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, per trobar l'angle que formen, α, ho farem buscant l'angle complementari de l'angle agut que formen el vector director $\vec{u}$ de la recta i el vector associat del pla $\vec{N} = (A, B, C)$, llavors: $\sin\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{N}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{N}|}$
3. **Angle entre dos plans**: donats dos plans π_1 i π_2, per trobar l'angle que formen aquests plans n'hi ha prou de trobar l'angle (agut) que formen els seus vectors associats.

1. **Projecció ortogonal d'un punt sobre una recta**: donats un punt P i una recta $r \equiv (P_r, \vec{u}_r)$ amb punt genèric P_r^g per trobar la projecció ortogonal de P sobre r, n'hi ha prou de resoldre l'equació $\overrightarrow{P_r^g P} \cdot \vec{u}_r = 0$ per trobar el punt Q de la recta que és projeccció ortogonal de P sobre ella.
2. **Projecció ortogonal d'un punt sobre un pla**: donat un punt P i un pla π, per trobar la projecció ortogonal de P sobre π, n'hi ha prou de trobar la intersecció d'una recta perpendicular a π que passi per P, amb el pla π. Clarament, la recta construida té com a vector director l'associat de π.
3. **Projecció ortogonal d'una recta sobre un pla**: per trobar la projecció ortogonal d'una recta $r \equiv (P_r, \vec{u}_r)$ sobre un pla π amb vector associat $\vec{N}$, buscarem la intersecció de π amb el pla π' que té com a determinació lineal $\pi' \equiv (P_r, \vec{u}_r, \vec{N})$

1. **Punt simètric d'un respecte un altre**: donat un punt P, per trobar el simètric (P') de P respecte un altre punt Q demanarem que Q sigui el punt mig de P i P', $M_{PP'} = Q$
2. **Punt simètric d'un respecte d'una recta**: donat un punt P i una recta r, per trobar el punt P', simètric de P respecte de r trobarem el punt Q, projecció ortogonal de P respecte de r, i demanarem que sigui $M_{PP'} = Q$
3. **Punt simètric d'un respecte d'un pla**: donat un punt P i un pla π, per trobar el punt P', simètric de P respecte de π, n'hi ha prou de trobar el punt Q, projecció ortogonal de P sobre π, i demanar que sigui $M_{PP'} = Q$.

1. **Distància entre dos punts**: Donats dos punts $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, per calcular la distància entre ells ho podem fer com el mòdul del vector $\overrightarrow{PQ}$
2. **Distància d'un punt a una recta**: donat un punt P i una recta r la distància, (mínima), entre ells es troba com la distància del punt P a la seva projecció sobre la recta.
3. **Distància d'un punt a un pla**: donat un punt $P = (p_1, p_2, p_3)$ i un pla $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ podem trobar la seva distància com la distància del punt P al punt projecció ortogonal de P sobre π. Alternativament, podem fer servir una fòrmula que, per la seva fàcil generalització a qualsevol dimensió, convé recordar,

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1. **Distància entre dos plans**: donats dos plans π, π', la seva distància només és diferent de zero si són paral·lels, i en aquest cas aquesta distància es troba com la distància d'un punt qualsevol d'un dels plans a l'altre.
2. **Distància entre una recta i un pla**: donada una recta r i un pla π, amb r exterior al pla, la seva distància es troba com la distància d'un punt qualsevol de la recta r al pla π.
3. **Distància entre dues rectes**: Donades dues rectes amb determinació lineal $r \equiv (P_r, \vec{u}_r)$, $s \equiv (P_s, \vec{u}_s)$, la seva distància es troba amb la fòrmula

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|}$$