Matemàtiques Segon Batxillerat

Artur Arroyo

curs 2009-2010

Matemàtiques segon batxillerat

Ordre en $\mathbb{R}$

Definició

Un conjunt A es diu ordenat quan s'ha definit en ell una relació, $\mathcal{R}$, d'ordre. Aquesta relació es diu que és d'ordre total si per qualsevol parell d'elements de A es verifica $a\mathcal{R}b$ o $b\mathcal{R}a$.
En el conjunt $\mathbb{R}$ dels nombres reals es defineix la relació binària

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^+ \cup 0 \qquad \text{tal que} \quad a + x = b$$

que la designem pel símbol $\leq$ i es llegeix "menor o igual que".

Intervals en la recta real

Definicions

- Anomenem interval obert d'extrems a i b i ho designem per (a, b) al conjunt dels nombres reals més grans que a i més petits que b, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/\ a < x < b\}$.
- Anomemen interval tancat d'extrems a i b i ho designem per $[a, b]$ al conjunt dels nombres reals més grans o iguals que a i més petits o iguals que b, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/\ a \leq x \leq b\}$.
- Anomemem interval semiobert d'extrems a i b i es designa per $(a, b]$ o $[a, b)$ al conjunt dels nombres reals compresos entre els dos extrems i que conté només a un d'ells, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}/\ a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}/\ a \leq x < b\}$

Continuïtat d'una funció en un punt

Definició

Es diu que una funció $f(x)$ és continua en un punt x_0 si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

quan els dos membres de la igualtat existeixin.

Per que existeixi el membre de l'esquerra de l'equació han d'existir els límits laterals

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \ , \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

i ademés *han de ser iguals*. Per que existeixi el membre de la dreta de l'equació, $f(x)$ ha d'estar definida en x_0.

Exemple 1

La funció
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 3 \\ 5 & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$$
no és continua en $x = 3$. Els límits laterals en $x = 3$ existeixen i són iguals (valen 9), però no coincideixen amb la imatge de la funció ja que $f(3) = 5$.

Exemple 2

La funció
$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$
no és continua en $x = 0$. El límits laterals en $x = 0$ existeixen però no valen el mateix.

La derivada

Definició

Sigui f(x) una funció real definida en un subconjunt D de $\mathbb{R}$. Es diu que la funció f(x) és *derivable en un punt* x_0 interior a D si existeix el límit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

el qual es representa per $f'(x)$ i rep el nom de derivada de $f(x)$ en el punt x_0. Si $f(x)$ és una funció real definida en un subconjunt D de $\mathbb{R}$; direm que $f(x)$ és *derivable en D* si ho és en cada un dels seus punts.

Sovint és més convenient calcular el límit quan la variable tendeix cap a zero. Una forma d'aconseguir això és fer una traslació al llarg de l'eix de les x. De fet si fem $h = x - x_0$, tenim

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Exemple 1

Sigui $f(x) = x^2$, la derivada d'aquesta funció en $x = 1$ és:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Exemple 2

Sigui $f(x) = \frac{1}{x}$, la derivada d'aquesta funció en $x = x_0$ és

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-(x - x_0)}{x x_0 (x - x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{x x_0} = \frac{-1}{x_0^2}$$

D'aquesta manera tenim una expressió per calcular la derivada en qualsevol punt. Sovint és convenient interpretar $f'(x_0)$ com una nova funció i és per aixó que, si $f(x) = \frac{1}{x}$, aleshores podem escriure $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Derivades successives

En general, si la funció $f'(x)$ és derivable, a la funció derivada de $f'(x)$ se l'anomena derivada segona i es representa per $f''(x)$. Procedint de forma anàloga, es defineix *la derivada $n-$éssima* com la funció derivada, si existeix, de la funció $f^{(n-1)}(x)$ i es representa per $f^{(n)}(x)$.

Exemple

Donada $f(x) = \frac{1}{x}$, tenim:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^3}, \quad f'''(x) = \frac{-1}{x^4}, \; f^{(4)}(x) = \frac{1}{x^5}$$

de forma que finalment,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$$

Propietats de la derivada

Linealitat

La derivada és un objecte lineal. Aquest és un resultat fonamental que es fa servir molt sovint i que s'expressa com

$$\boxed{\Big(f(x)+g(x)\Big)' = f'(x)+g'(x)} \tag{1}$$

$$\boxed{\Big(kf(x)\Big)' = kf'(x), \quad k \in \mathbb{R}} \tag{2}$$

Funcions compostes

Regla de la cadena per funcions compostes.

$$\boxed{\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x))g'(x)} \tag{3}$$

Per tal de motivar el sentit de la *regla de la cadena*, considereu la funció

$$f(x) = (1 + x^2)^{10}$$

Una possibilitat per calcular la derivada de $f(x)$ seria desenvolupar $(1+x^2)^{10}$, i després fer la derivada de cada terme. Potser serà llarg, però es podria fer així. La qüestió és què faríem si haguèssim de derivar $(1+x^2)^{100}$. Ara és evident que necessitem un altre mètode. La solució és la *regla de la cadena*. Tenim que $f(x)$ es pot interpretar com $f(x) = h(g(x))$, amb $h(x) = x^{10}$ i $g(x) = (1+x^2)$. Diem que $f(x)$ és la *composició* de les funcions $g(x)$ i $h(x)$, i simbòlicament podem escriure

$$f = h \circ g$$

Exemple

Calculem la derivada de

$$f(x) = (1 + x^2)^{100}$$

Tenim que $f(x) = h(g(x))$, on $g(x) = 1 + x^2$ i $h(x) = x^{100}$.
Aleshores la *regla de la cadena* implica que

$$f'(x) = 100(1 + x^2)^{99} \cdot 2x$$

Derivades laterals

Definició

Sigui f(x) una funció real definida en un subconjunt D de $\mathbb{R}$ i sigui x_0 un punt interior a D. Si existeix el límit a la dreta

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

es diu que la funció f(x) té derivada a la dreta del punt x_0 i es representa per $f'(x_0^+)$. Si existeix el límit

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

es diu que la funció f(x) té derivada a l'esquerra del punt x_0 i es representa per $f'(x_0^-)$.

És clar, per la definició de derivada, que si una funció admet derivada en un punt les derivades laterals també existeixen i són iguals. No succeeix el mateix si només existeixen les derivades laterals, ja que la funció pot no ser derivable tal i com passa per exemple amb la funció $f(x) = |x|$ a l'origen.

Exemple

Sigui $f(x) = |x|$, aleshores

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Exemple (continuació)

i tenim

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

I d'aquesta forma veiem que la funció no és derivable a l'origen per no ser iguals les derivades laterals en aquest punt. Malgrat tot això, és fàcil comprovar que la funció *sí* és continua a l'origen.

Com a conclusió de les consideracions anteriors tenim la següent

Proposició

Si una funció és derivable en un punt x_0, aleshores la funció és contínua en aquest punt.

Prova.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))\frac{x-x_0}{x-x_0} = \\
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = \\
f'(x_0)\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

la proposició queda provada.

Interpretació geomètrica de la derivada.

Considereu una funció $y = f(x)$ i la seva gràfica. La gràfica d'una funció és el conjunt de punts (això és $(x, f(x))$ per les x's pertanyents al domini de la funció f).
Fixem un punt de la gràfica, per exemple, $(x_0, f(x_0))$. Si la gràfica en aquest punt és prou suau, és natural preguntar-se si podem trobar l'equació de la recta que *toca* la gràfica en aquest punt. Tal recta s'anomena *recta tangent* a la gràfica en el punt en qüestió. Una forma de trobar la recta tangent és considerar un punt de la gràfica, $(x, f(x))$ amb x proper a x_0, i aleshores dibuixar la recta que uneix els dos punts. Quan anem triant valors de x més i més propers a x_0, les rectes s'acosten més i més a la recta tangent.

Donat que totes aquestes rectes passen pel punt $(x_0, f(x_0))$, les seves equacions es poden determinar trobant el seu pendent. El pendent de la recta que passa pels punts $(x_0, f(x_0)$ i $(x, f(x))$, (amb $x \neq x_0$) ve donat per

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

La tangent mateixa tindrà pendent m, el qual és molt proper a $m(x)$ quan x mateix s'acosta molt a x_0. Aquest és el concepte de límit de nou. En altres paraules, tenim

$$m = \lim_{x \to x_0} m(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ecuació de la recta tangent.

De forma que l'equació de la recta tangent és

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

o, molt millor, ja que la m no conté prou informació

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Taula de derivades

És evident que cada vegada que haguem de calcular la derivada d'una funció pot ser molt farragós fer servir la definició de derivada. Per això, és més convenint aprendre unes quantes expresions que trobarem sovint. Escriurem aquí les que resulten més útils.

$$y = k \qquad y' = 0 \tag{4}$$

$$y = f(x)^n \qquad y' = nf(x)^{n-1}f'(x)\ ;\ n \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$y = a^{f(x)} \qquad y' = a^{f(x)}f'(x)\log_a e\ ;\ a > 0 \tag{6}$$

$$y = \sin f(x) \qquad y' = f'(x)\cos f(x) \tag{7}$$

$$y = \cos f(x) \qquad y' = -f'(x) \sin f(x) \tag{8}$$

$$y = \log_a f(x) \qquad y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e \tag{9}$$

$$y = \arcsin f(x) \qquad y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}} \tag{10}$$

$$y = \arccos f(x) \qquad y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}} \tag{11}$$

$$y = \arctan f(x) \qquad y' = \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} \tag{12}$$

Un resultat molt important i que es fa servir sovint és la *fórmula de Leibniz*

$$\boxed{\Big(f(x)g(x)\Big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)} \tag{13}$$

un cas particular de l'anterior, però que sovint s'escriu expressament

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}} \tag{14}$$

Els resultats següents tenen gran importància.

Teorema del valor mig o de Cauchy

Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions continues en l'interval tancat $[a, b]$ i derivables en l'obert (a, b) aleshores existeix, al menys, un punt $\alpha \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x)$$

Teorema dels increments finits o de Lagrange

Si f(x) és una funció contínua en l'interval tancat [a,b] i derivable en l'obert (a,b), aleshores existeix, al menys, un punt $\alpha \in (a, b)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema de Rolle

Si una funció és contínua a l'interval tancat $[a, b]$ i derivable a l'interval obert (a, b) i a més $f(a) = f(b)$ aleshores existeix, al menys, un punt $\alpha \in (a, b)$ on la derivada de la funció s'anula, és a dir $f'(\alpha) = 0$

Teorema de L'Hôpital

Si f(x) i g(x) són dues funcions derivables en un cert entorn del punt x_0 on $g'(x) \neq 0$ amb $f(x_0) = g(x_0) = 0$, aleshores si existeix

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{es verifica} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aquest teorema permet calcular límits indeterminats d'una manera molt eficaç:

Exemple

Calcular el límit

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$$

apliquem L'Hôpital dues vegades seguides per obtenir

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2} = 0$$

La regla de L'Hôpital també es pot aplicar en el cas que sigui $x_0 \to \infty$

Exemple

Calcular el límit

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$$

aplicant reiteradament L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x + 1}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x} = 0$$