Teoremes sobre funcions contínues i derivables

Teorema del valor mig generalitzat (Cauchy)

Siguin $f(x)$, $g(x)$ funcions contínues en un interval tancat $[a,b]$ i derivables en un obert (a,b), llavors existeix un $c \in (a,b)$ amb $g(a) \neq g(b)$ i $g'(c) \neq 0$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Exemple 1.
Veieu si es pot aplicar el teorema de Cauchy en l'interval $[1,4]$ a les funcions

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

i

$$g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$$

Les funcions $f(x)$, $g(x)$ són derivables i contínues a tot $\mathbb{R}$ per ser polinomis. A més es compleix que $g(1) \neq g(4)$ per tant es compleixen les condicions del teorema.

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{11-2}{27-9} = \frac{2c-2}{3c^2-14c+20}$$

$$c^2 - 6c + 8 = 0$$

d'on

$$c = 2 \in (1,4) \qquad\qquad c = 4 \in (1,4)$$

i finalment,

$$g'(2) \neq 0$$

Si al teorema anterior considerem $g(x) = x$ tenim el següent resultat:

Teorema del valor mig (Lagrange)

Sigui $f(x)$ contínua en un interval tancat $[a,b]$ i derivable en un obert (a,b), llavors existeix un $c \in (a,b)$ amb $a \neq b$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Exemple 2.
Es pot aplicar el teorema de Lagrange a la funció $f(x) = x^3$ en l'interval [-1,2]?

La funció $f(x)$ és contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$ per ser un polinomi, llavors podem aplicar el teorema per obtenir

$$\frac{8-(-1)}{2-(-1)} = f'(c)$$

d'on

$$f'(c) = 3 \Longrightarrow 3c^2 = 3 \Longrightarrow c = \pm 1$$

el valor $c = 1$ és el predit pel teorema.

Si ara al teorema anterior afegim la condició $f(a) = f(b)$ tenim el següent resultat

Teorema de Rolle

Sigui $f(x)$ contínua en un interval tancat $[a,b]$ i derivable en un obert (a,b) amb $f(a) = f(b)$ llavors existeix un $c \in (a,b)$ amb $a \neq b$ tal que

$$f'(c) = 0$$

Exemple 3.
Es pot aplicar el teorema de Rolle a la funció $f(x) = \ln(5 - x^2)$ en l'interval [-2,2]?

La funció $f(x)$ és contínua i derivable en l'interval considerat (es comprova), i és $f(-2) = f(2)$, llavors podem aplicar el teorema per obtenir

$$\frac{-2c}{5 - c^2} = 0$$

d'on

$$c = 0 \in (-2, 2)$$

Teorema de Bolzano

Sigui $f(x)$ contínua en un interval tancat $[a, b]$, llavors, si $f(a) \cdot f(b) < 0$ existeix un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Exemple 4.
Demostreu que l'equació $\sin x + 2x = 1$ té al menys una solució real.

Definim la funció $F(x) = \sin x + 2x - 1$ que es contínua per ser suma de funcions contínues. Podem observar que $F(0) = -1 < 0$ i $F(\pi) = 2\pi - 1 > 0$, llavors el teorema ens diu que està garantit que existeix algun $c \in (0, \pi)$ tal que $F(c) = 0$, que és equivalent a dir que l'equació original té al menys una solució real.