Càlcul 1 2010/11

1. Continuïtat i límits

1 . Trobeu el domini de les funcions següents:

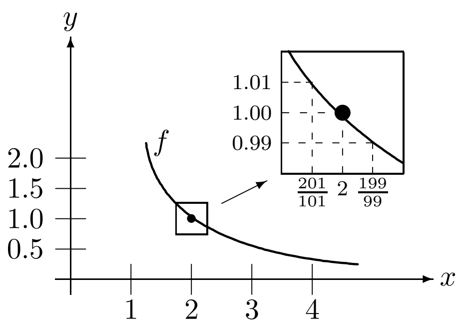
(a) $f(x) = \ln(\ln x)$ (b) $g(x) = \dfrac{x+3}{x^2+7x+12}$ (c) $h(x) = \sqrt{x^2+7x+12}$

(d) $i(x) = \dfrac{\tan x}{\tan^2 2x}$ (e) $j(x) = \sqrt{|x-2| - |x-1|}$

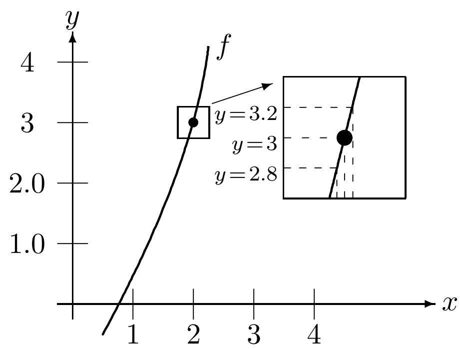
2 . Dibuixeu la gràfica de f i identifiqueu els valors de c per als quals existeix el límit $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, en els casos següents

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 2 \\ 8-2x, & 2 < x < 4 \\ 4, & x \ge 4 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ 1-\cos x, & 0 \le x \le \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$

3 . La gràfica de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ es mostra a la figura. Trobeu un δ tal que si $0 < |x-2| < \delta$, llavors $|f(x) - 1| < 0.01$



4 . La gràfica de $f(x) = x^2 - 1$ es mostra a la figura. Trobeu un δ tal que si $0 < |x-2| < \delta$, llavors $|f(x) - 3| < 0.2$



5 . En els exercicis següents utilitzeu la definició $\varepsilon - \delta$ de límit per demostrar que el límit és el donat.

(a) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$ (b) $\lim\limits_{x\to -5} |x-5| = 10$ (c) $\lim\limits_{x\to -3} (x^2+3x) = 0$

6 . Tenim una rosca, la circumferència interna de la qual és de 6 cm.

(a) Quin és el radi de la rosca?

(b) Si la circumferència interna de la rosca pot variar entre 5.5 i 6.5 cm, quan pot variar el seu radi?

(c) Utilitzeu la definició $\varepsilon - \delta$ de límit per descriure aquesta situació. Identifiqueu ε i δ.

7 . En els exercicis següents trobeu el límit, si existeix

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2 - x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{[1/(x+4)] - (1/4)}{x}$

(g) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{5x}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3(1-\cos x)}{x}$ (k) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta\tan\theta}{\theta}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x}$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{\cot x}$ (o) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (q) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos x$ (r) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

(s) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\sin x)E(x)$

8 . En els exercicis següents trobeu els valors de x (si existeix algun) en els quals f no sigui contínua. Quines discontinuïtats són evitables?

(a) $f(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x-6}{x^2 - 36}$

(c) $f(x) = \dfrac{|x+7|}{x+7}$ (d) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3\,, & x < 1 \\ x^2\,, & x \geq 1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \tan\dfrac{\pi x}{4}\,, & |x| < 1 \\ x\,, & |x| \geq 1 \end{cases}$ (f) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{cosec}\dfrac{\pi x}{6}\,, & |x-3| \leq 2 \\ 2\,, & |x-3| > 2 \end{cases}$

(g) $f(x) = 5 - E(x)$

9 . En els casos següents trobeu la constant a, tal que la funció sigui contínua en tota la recta real

(a) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{4\sin x}{x}\,, & x < 0 \\ a - 2x\,, & x \geq 0 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}\,, & x \neq a \\ 8\,, & x = a \end{cases}$

10 . En els casos següents analitzeu la continuïtat de la funció composta $h(x) = f(g(x))$

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x - 1$ (b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$

11 . En els casos següents utilitzeu el teorema del valor mig per estimar el zero amb una precissió de dues xifres decimals en l'interval $[0, 1]$.

(a) $f(x) = x^3 + x - 1$ (b) $g(t) = 2\cos t - 3t$ (c) $h(\theta) = 1 + \theta - 3\tan\theta$

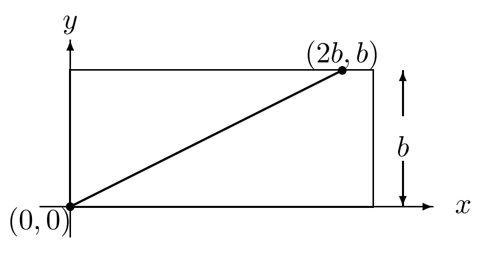
12 . Déjà vu. Un dissabte a les 8:00 del matí, un home comença a pujar corrent el vessant d'una muntanya cap al campament de cap de setmana. El diumenge a les 8:00 del matí baixa corrent la muntanya. Triga 20 minuts en pujar i només 10 en baixar. En un cert punt del camí de baixada, l'home s'adona que va passar pel mateix punt a la mateixa hora el dia anterior. Demostreu que l'home no va errat. (*Suggeriment:* Considereu que $s(t)$ i $r(t)$ són les funcions de posició de pujada i baixada, i apliqueu el teorema del valor mig a la funció $f(t) = s(t) - r(t)$.)

13 . Volum. Utilitzeu el teorema del valor mig per demostrar que entre totes les esferes, els radis de les quals pertanyen a l'interval $[5, 8]$, n'hi ha una de volum de 1500 cc.

14 . La funció signe es defineix com $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Construïu la gràfica de $\operatorname{sgn}(x)$ i calculeu els límits següents (en cas que sigui possible)

(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$

15 . El.laboració de models. Un nedador creua una piscina d'amplada b nedant en línia recta des del punt $(0, 0)$ fins el punt $(2b, b)$



(a) Sigui f una funció definida com la coordenada y del punt sobre el costat més llarg de la piscina que es troba més a prop del nedador en qualsevol moment del seu trajecte. Trobeu la funció f i construïu la seva gràfica. Es tracta d'una funció contínua? Raoneu la resposta.

(b) Sigui g la distància mínima entre el nedador i el costat més llarg de la piscina. Trobeu la funció g i construïu la gràfica. Es tracta d'una funció contínua? Raoneu la resposta.

16 . En els casos següents trobeu les asímptotes verticals (si n'hi ha) de la funció

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ (b) $g(t) = \dfrac{t-1}{t^2+1}$ (c) $h(t) = \dfrac{t^2 - 2t}{t^4 - 16}$

(d) $f(x) = \sec \pi x$ (e) $g(\theta) = \dfrac{\tan \theta}{\theta}$

17 . En els casos següents determineu si la funció té una asímptota vertical o una discontinuïtat evitable en $x = -1$

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x+1}$ (b) $f(x) = \dfrac{\sin(x+1)}{x+1}$

18 . En els casos següents calculeu el límit

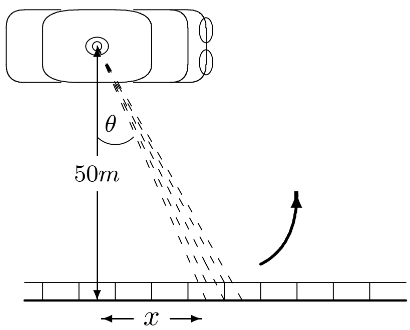
(a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)$ (c) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{cosec} x}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+2}{\cot x}$ (e) $\lim\limits_{x \to (1/2)} x \sec \pi x$ (f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

(g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$ (h) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$ (i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+p^2} - p}{\sqrt{x^2+q^2} - q}$, p i $q > 0$

(j) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{x - a}$, $a > 0$

19 . Ritme o velocitat de canvi. Un cotxe de policia està estacionat a $50m$ d'un gran magatzem



La llum giratòria de la part superior de l'automòbil gira a un ritme o velocitat de 1/2 revolució per segon. El ritme o velocitat al qual es desplaça el feix de llum al llarg de la paret és $r = 50\pi \sec^2 \theta m/s$.

(a) Calculeu el ritme o velocitat r quan θ és $\pi/6$.

(b) Ídem quan θ és $\pi/3$.

(c) Trobeu el límit de r quan $\theta \to (\pi/2)^-$.

2. Derivació

1 . En els casos següents determineu el domini de definició, calculeu les derivades laterals en $x = 1$ (si existeixen), i digueu si la funció és derivable en aquest punt.

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (b) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$

2 . En els casos següents trobeu la derivada de la funció

(a) $y = \cos\sqrt{\sin(\tan \pi x)}$ (b) $g(x) = \left(\dfrac{x+5}{x^2+2}\right)^2$ (c) $y = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$

(d) $g(x) = (2 + (x^2+1)^4)^3$ (e) $f(x) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}$ (f) $g(\theta) = \sec\left(\dfrac{1}{2}\theta\right)\tan\left(\dfrac{1}{2}\theta\right)$

3 . Trobeu la segona derivada de la funcions següents

(a) $f(x) = \dfrac{4}{(x+2)^3}$ (b) $f(x) = \sec^2 \pi x$

4 . En els casos següents trobeu les derivades de la funció f per a $n = 1, 2, 3$ i 4. Utilitzeu els resultats per elaborar, sense demostrar, una regla general per a $f^{(n)}(x)$ en termes de n.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (b) $f(x) = x\sin x$ (c) $f(x) = x^n$

5 . Siguin $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ i $g(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(a) Demostreu que f és contínua, però no derivable en $x = 0$.

(b) Demostreu que g és derivable en 0 i calculeu $g'(0)$.

6 . Demostreu que les gràfiques de $y = x$ i $y = 1/x$ tenen rectes tangents perpendiculars entre si en el seu punt d'intersecció.

7 . Llencem un projectil cap a dalt des de la superfície terrestre amb una velocitat inicial de 120 m/s. Quina és la seva velocitat al cap de 5 segons? I al cap de 10?

8 . El desplaçament de la seva posició d'equilibri per a un objecte en moviment harmònic situat a l'extrem d'una molla és $y = \dfrac{1}{3}\cos 12t - \dfrac{1}{4}\sin 12t$, on y es mesura en metres i t en segons. Determineu la posició i la velocitat de l'objecte quan $t = \pi/8\,s$.

9 . Una boia oscil.la amb moviment harmònic simple donat per $y = A\cos\omega t$, mentre que les ones la copegen. La boia es mou verticalment, des del punt més baix fins el més alt, un total de 1 metre? Cada 10 segons torna al punt de màxima alçada.

(a) Escriviu una equació que expliqui el moviment d'aquesta boia si està en la màxima alçada quan $t = 0$.

(b) Calculeu la velocitat de la boia en funció de t.

10. Sigui $f(x) = \sin \beta x$, on β és una constant.

(a) Calculeu les quatre primeres derivades de la funció.

(b) Verifiqueu que la funció i la segona derivada satisfan l'equació $f''(x) + \beta^2 f(x) = 0$.

(c) Utilitzeu els resultats de l'apartat (a) per desenvolupar fórmules generals per a les derivades d'ordre parell i senar $f^{(2k)}(x)$ y $f^{(2k-1)}(x)$.

11. Sigui u una funció derivable de x. Considereu que $|u| = \sqrt{u^2}$ per demostrar que $\dfrac{d}{dx}(|u|) = u' \dfrac{u}{|u|}$, $u \neq 0$, i feu servir el resultat per trobar la derivada de les funcions

(a) $h(x) = |x| \cos x$ (b) $f(x) = |x^2 - 9|$

12. Demostreu que la derivada d'una funció senar és parella. És a dir, si $f(-x) = -f(x)$, llavors $f'(-x) = f'(x)$.

13. Sigui f una funció derivable de període p.

(a) La funció f', és periòdica?

(b) Considerant la funció $g(x) = f(2x)$, la funció $g'(x)$, és periòdica?

14. Considereu la paràbola $x = y^2$. Trobeu el nombre de rectes normals a la paràbola des dels punts següents:

(a) $(1/2,\ 0)$. (b) $(1,\ 1)$.

Per a quin valor de $(x_0,\ 0)$ existeixen dues rectes normals perpendiculars entre si?

15. **(*)** (a) Considerem la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^n} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Proveu que és derivable a l'origen i que $f'(0) = 0$.

(b) Considerem la funció

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Proveu que g admet derivades de tots els ordres a l'origen i que $g^{(n)}(0) = 0$.

16. **(*)** Considerem la funció f definida per a $x \neq 0$ segons

$$f(x) = \frac{x^n}{(e^x - 1)^p},$$

on n, p són enters tals que $n - p \geq 2,\ p > 0$.

(a) Calculeu el límit d'f a l'origen i proveu que es pot escollir un valor de $f(0)$ de forma que f sigui derivable en 0.

(b) En aquest cas, es pot calcular $f''(0)$?

17. Calculeu la derivada de la funció $f(x) = \arctan \dfrac{x+c}{1-cx}$, $x \in \mathbb{R}$, i deduïu que $f(x) = \arctan x + \arctan c$.

18. Sigui $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, per a $x \neq 0$, $f(0) = 0$, i h, k funcions tals que $h(0) = 3$ i $h'(x) = \sin^2(\sin(x+1))$; i $k(0) = 0$ i $k'(x) = f(x+1)$ Calculeu les derivades següents:

(1) $(f \circ h)'(0)$.
(2) $(k \circ f)'(0)$.
(3) $\alpha'(x^2)$, on $\alpha(x) = h(x^2)$.

19. Siguin f i g dues funcions derivables en $\mathbb{R}$.

(a) Suposem que $f'(x) > g'(x)$, per a tot x, i que $f(a) = g(a)$. Proveu que se satisfà:

$$f(x) > g(x), \quad \text{si } x > a, \qquad \text{i} \qquad f(x) < g(x), \quad \text{si } x < a.$$

(b) Trobeu un exemple que mostri que la conclusió no seria correcta sense la hipòtesi $f(a) = g(a)$.

20. **(*)** Una partícula recorre una distància unitat en una unitat de temps i comença i acaba amb velocitat 0. Proveu que en algun moment té acceleració ≥ 4.

21. Sigui f una funció dues vegades derivable en un interval I tal que $f''(x) > 0$. Proveu que per a tot $a, b \in I$, es té

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

22. Utilitzant el teorema del valor mig, reiteradament, proveu que

$$\tan x > x + \frac{x^3}{3}, \qquad 0 < x < \pi/2.$$

23. Sigui $g(x)$ una funció 2 cops derivable en $\mathbb{R}$ tal que $g''(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$, $g(0) = g'(0) = 0$ i $g''(0) = 17$. Definim

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

trobeu $f'(0)$.

24. Considerem tres funcions f, g, h que satisfan $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, per a tot x, i sigui a tal que $f(a) = g(a) = h(a)$ i $f'(a) = h'(a)$. Proveu que g també és derivable en a i que $f'(a) = g'(a) = h'(a)$.

25. En els casos següents useu la derivada per determinar si la funció té una funció inversa.

$$\text{(a)} \quad f(x) = \cos \frac{3x}{2} \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \ln(x-3)$$

26. Representeu esquemàticament les següents funcions i indiqueu en quins intervals $[a, b]$ són injectives

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2$. (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

27 . (a) Trobeu la funció inversa de $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$.
(b) Feu un estudi de la gràfica de $f(x)$ i de $f^{-1}(x)$ i representeu-les.

28 . En els casos següents trobeu dy/dx mitjançant la derivada implícita

(a) $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$ (b) $(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$ (c) $y = \sin xy$

29 . Calculeu el pendent de la recta tangent en el punt $(4, 2)$ de la lemniscata

$$3(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$$

30 . En els casos següents calculeu dy/dx de manera implícita i trobeu el major interval amb la forma $-a < y < a$ o $0 < y < a$ tal que y sigui una funció derivable de x. Expresseu dy/dx en funció de x

(a) $\tan y = x$ (b) $\cos y = x$

31 . En els casos següents trobeu d^2y/dx^2 en termes de x i y.

(a) $x^2y^2 - 2x = 3$ (b) $y^2 = x^3$

32 . En els casos següents, descriviu el tipus de forma indeterminada (si n'hi ha) que s'obté per substitució directa, i avalueu el límit usant la regla de l'Hôpital, si cal.

(a) $\lim_{x\to\infty} x \ln x$ (b) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$ (c) $\lim_{x\to 0^+} (e^x + x)^{2/x}$

(d) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ (e) $\lim_{x\to 4^+} [3(x-4)]^{x-4}$ (f) $\lim_{x\to 1^+} (\ln x)^{x-1}$

(g) $\lim_{x\to 0^+} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^x$ (h) $\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x^2-4} - \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}\right)$ (i) $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{3}{\ln x} - \frac{2}{x-1}\right)$

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{25-x^2}-5}{x}$ (k) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1-x)}{x}$ (l) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{x^2-1}$

(m) $\lim_{x\to 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}$ $[a, b \neq 0]$ (n) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ $[a, b \neq 0]$ (o) $\lim_{x\to 1} \frac{\arctan x - (\pi/4)}{x-1}$

(p) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$ (q) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x}$ (r) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\sin x}$

33 . Calculeu el límit $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+a)^{x+a} - x^x}{x^x \ln x}$, en funció d'$a$.

34 . Història del càlcul. L'any 1696 el llibre de text de càlcul de l'Hôpital, va il.lustrar la seva regla amb la funció $f(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ quan x tendeix a a, $a > 0$. Trobeu aquest límit.

35 . Trobeu els extrems absoluts de

(a) $y = 3x^{2/3} - 2x\,,\quad x \in [-1, 1]\,.$ (b) $y = 3 - |t - 3|\,,\quad x \in [-1, 5]\,.$

(c) $y = \tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right),\quad x \in [0, 2]$

36 . Useu el teorema del valor intermig i el teorema de Rolle per demostrar que les equacions següents tenen exactament una solució real

(a) $x^5 + x^3 + x + 1 = 0\,.$ (b) $3x + 1 - \sin x = 0\,.$

37 . La tos obliga a que la tràquea (tub de vent) es constrenyi, la qual cosa afecta la velocitat v de l'aire que passa a través d'aquest conducte. La velocitat de l'aire quan es tus és $v = k(R - r)r^2$, $0 \le r < R$, on k és una constant, R és el radi normal de la tràquea i r és el radi quan es tus. Quin radi produirà la maxima velocitat de l'aire?

38 . La potència elèctrica P en watts en un circuït de corrent directa amb dues resistències R_1 i R_2 connectades en paral.lel és $P = \dfrac{vR_1R_2}{(R_1 + R_2)^2}$, on v és el voltatge. Si v i R_1 es mantenen constants, quina resistència R_2 produeix la potència màxima?

39 . Feu un estudi complet de la gràfica de les funcions següents

(a) $y = \dfrac{x+1}{x^2-4}$ (b) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}$

(c) $y = \sin\left(\dfrac{x}{x-2}\right),\ x > 3$ (d) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

(e) $y = \dfrac{\sqrt{9x^2-2}}{2x+1}$ (f) $y = 2 - \dfrac{3}{x^2}$

(g) $y = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ (h) $y = x\,\exp(x^2+1)$

(i) $y = (x+1)\ln|x+1|$ (j) $y = x^x,\ x > 0$

(k) $y = x\,\mathrm{cotan}\,x,\ -2\pi < x < 2\pi$ (l) $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$

Optimització

1 . Trobeu dos números positius que satisfacin que el producte és 185 i la suma és mínima.

2 . Determineu el punt sobre la gràfica de la funció $f(x) = x^2$ que estigui més proper al punt $(2, 1/2)$.

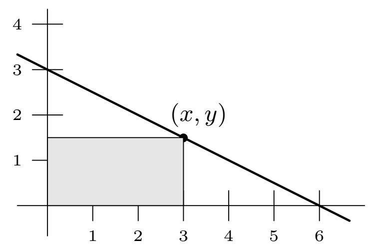
3 . Una pàgina rectangular contindrà $30cm^2$ d'àrea impresa. Els marges de cada costat són d'$1cm$. Trobeu les dimensions de la pàgina de manera que es faci servir la menor quantitat de paper.

4 . En un dia determinat, el ritme o tasa de flux F (vehicles per hora) en una autopista congestionada és $F = \dfrac{v}{22 + 0.02v^2}$, on v és la velocitat del trànsit en Km/h Quina velocitat maximitzarà el ritme o tasa de flux en l'autopista?

5 . Un ramader té 400 m de tancat amb els quals delimita dos corrals rectangulars adjacents. Quines dimensions han d'utilitzar-se de manera que l'àrea delimitada sigui un màxim?

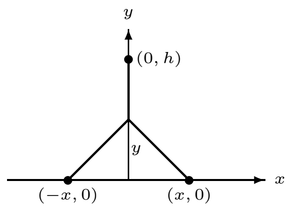
6 . Una finestra Norman es construeix adossant un semicercle a la part superior d'una finestra rectangular ordinària. Trobeu les dimensions d'una finestra Normam d'àrea màxima si el perímetre total és de 16 metres.

7 . Un rectangle està tallat pels eixos x i y, i la gràfica de $y = (6 - x)/2$.



Quina longitud i amplada ha de tenir el rectangle de manera que la seva àrea sigui un màxim?

8 . Dues fàbriques es troben en les coordenades $(-x, 0)$ i $(x, 0)$ amb subministrament elèctric ubicat en $(0, h)$



Determineu y de manera tal que la longitud total de la línea de transmissió elèctrica des del subministrament elèctric fins a les fàbriques sigui un mínim.

9 . Una font lluminosa es troba sobre el centre d'una taula circular de 4 m de diàmetre. Trobeu l'alçada h de la font lluminosa de manera tal que la il.luminació I en el perímetre de la taula sigui màxima si $I = k(\sin\alpha)/s^2$, on s és l'alçada obliqua, α és l'angle que forma el llum quan incideix sobre la taula, i k és una constant.

10 . Un home es troba en una barca a 2 Km del punt més proper a la costa. Es dirigeix al punt Q que es troba a 3 Km per la costa i a 1 Km terra endins. L'home pot remar a 2 Km per hora i caminar a 4 Km per hora . Cap a quin punt sobre la costa ha de remar per arribar al punt Q en el menor temps possible?

11 . La utilitat (guany/benefici) P (en milers d'Euros) per a una companyia que gasta una quantitat s (en milers d'Euros) en publicitat és $P = -\frac{1}{10}s^3 + 6s^2 + 400$.

(a) Trobeu la quantitat de diners que la companyia ha de gastar en publicitat per produir un benefici màxim (màxim rendiment).

(b) El punt de disminució de rendiments és aquell en què la tasa de creixement de la funció d'utilitat (de rendiment) comença a baixar. Determineu-lo.

3. Integració

Calculeu les primitives següents utilitzant el mètode que s'indica en cada exercici.

1 . Primitives immediates.

$$(a) \int \frac{x+6}{\sqrt{x}}dx, \qquad (b) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx, \qquad (c) \int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx,$$
$$(d) \int (a+bx^3)^2 dx, \qquad (e) \int (\cos^2\theta - \sin\theta)d\theta.$$

2 . Canvi de variables.

$$(a) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx, \qquad (b) \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx, \qquad (c) \int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx$$
$$(d) \int x\sqrt[3]{3-4x^2}dx, \qquad (e) \int \sec 2x \tan 2x dx, \qquad (f) \int \frac{x-\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$$
$$(g) \int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}dx, \qquad (h) \int \frac{e^x}{e^x-1}dx, \qquad (i) \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$
$$(j) \int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}dx, \qquad (k) \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx \qquad (l) \int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx.$$

3 . Per parts.

$$(a) \int x^3 e^x dx, \qquad (b) \int x\ln x dx, \qquad (c) \int x\sqrt{x-5}dx$$
$$(d) \int x^2\cos x dx, \qquad (e) \int \arctan x dx, \qquad (f) \int e^{2x}\sin x dx$$
$$(g) \int x\sin^2 x dx.$$

4 . Utilitzeu la integració per parts per provar les fórmules següents:

$$\begin{aligned}
\int x^n \sin x dx &= -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx,\\
\int x^n \cos x dx &= x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x dx,\\
\int x^n \ln x dx &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}(-1+(n+1)\ln x) + C,\\
\int x^n e^{ax} dx &= \frac{x^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx,\\
\int e^{ax}\sin bx dx &= \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C,\\
\int e^{ax}\cos bx dx &= \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C,
\end{aligned}$$

i apliqueu-les per calcular les primitives

$$\int x^5 \ln x dx, \qquad \int x^3 e^{2x} dx.$$

5 . Trigonomètriques.

$$(a) \int \sin 2x \cos x dx, \qquad (b) \int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin x}} dx, \qquad (c) \int \sin^3 x dx.$$

Proveu la fórmula

$$(e) \int \cos^p x \sin^q x dx = -\frac{\cos^{p+1} x \sin^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \int \cos^p x \sin^{q-2} x dx.$$

6 . Funcions racionals.

$$(a) \int \frac{5x}{x^2 - 10x + 25} dx, \qquad (b) \int \frac{1}{x^2 - 25} dx, \qquad (c) \int \frac{x+1}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx,$$
$$(d) \int \frac{x}{(a + bx)^2} dx, \qquad (e) \int \frac{1}{x^2 (a + bx)} dx, \qquad (f) \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$$
$$(g) \int \frac{1}{x^3 (x^3 + 1)} dx.$$

7 . Substitucions trigonomètriques.

$$(a) \int \sqrt{4 - x^2} dx, \qquad (b) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}} dx, \qquad (c) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} dx,$$
$$(d) \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^4} dx, \qquad (e) \int e^{2x} \sqrt{1 + e^{2x}} dx, \qquad (f) \int (x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} dx$$
$$(g) \int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx.$$

8 . Miscel·lània.

$$(a) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx, \qquad (b) \int \sqrt{4 + \tan^2 x} dx, \qquad (c) \int \frac{3 - 4x}{(1 - 2\sqrt{x})^2} dx,$$
$$(d) \int x^2 \ln \sqrt{1 - x} dx, \qquad (e) \int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx, \qquad (f) \int \frac{1}{x^4 - 2x^2 + 1} dx$$
$$(g) \int \frac{1}{2 + 3\cos^2 x} dx, \qquad (h) \int \frac{1}{\sqrt{2x + 1} - (2x + 1)^{1/4}} dx, \qquad (i) \int \frac{\arcsin(2x - 1)}{\sqrt{x - x^2}} dx$$
$$(j) \int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1 + x^2}} dx, \qquad (k) \int \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1/2} dx.$$

9 . Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x < 4, \\ x, & x \geq 4. \end{cases}$$

Useu fórmules geomètriques per a calcular la integral

$$\int_0^8 f(x) dx.$$

10 . Algunes fórmules de sumes:

(a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(b) Càlcul de la suma de quadrats: observeu que

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Considereu les igualtats

$$\begin{array}{rcl} 2^3 - 1^3 & = & 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 & = & 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ \ldots & & \ldots \\ (n+1)^3 - n^3 & = & 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{array}$$

i deduïu una fórmula per

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

(c) Utilitzeu el mateix mètode per calcular

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

11 . Trobeu el límit de $s(n)$ quan $n \to \infty$ en els casos següents:

$$(a)\ s(n) = \frac{81}{n^4}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right), \quad (b)\ s(n) = \frac{64}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1}{6}\right).$$

12 . Useu les fórmules de l'exercici 10 per calcular els límits de les sumes de Riemann

$$(a)\ \text{lím}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3i}{n^2}, \quad (b)\ \text{lím}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3}(i-1)^2, \quad (c)\ \text{lím}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right).$$

13 . Utilitzeu particions regulars per calcular la integral següent usant sumes de Riemann:

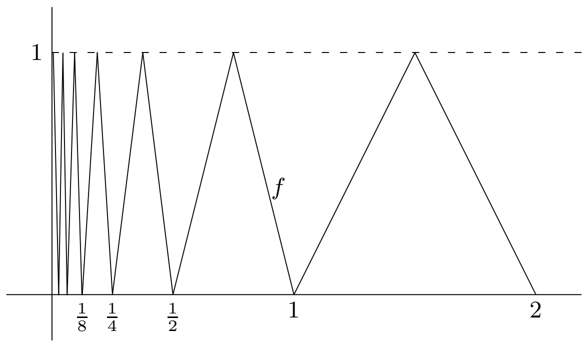
$$(a)\ \int_{-1}^{4} 4x^2 dx.$$

14 . Proveu que

$$\int_0^a x^3 dx = \frac{a^4}{4}$$

utilitzant particions en n subintervals iguals i usant les fórmules del problema anterior.

15 . Indiqueu si la funció de la figura és integrable.



16 . El teorema del valor mig assegura que si $f(x)$ és una funció contínua, aleshores hi ha un c tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Determineu el valor de c per a les integrals següents

$$(a)\ \int_0^3 x^3 dx, \qquad (b)\ \int_0^2 (x - 2\sqrt{x})dx.$$

17 . Trobeu el valor mig de la funció corresponent en l'interval indicat:

$$(a)\ f(x) = 9 - x^2, \quad [-3,3], \qquad (b)\ f(x) = \sin x, \quad [0,\pi],$$
$$(c)\ f(x) = \frac{4(x^2+1)}{x^2}, \quad [1,3].$$

18 . Calculeu les derivades de les funcions següents:

(a) $F(x) = \displaystyle\int_a^{x^3} \sin t dt.$

(b) $F(x) = \displaystyle\int_{15}^{x} \left(\int_8^y \frac{1}{1+t^2+\sin t^2} dt \right) dy.$

(c) $F(x) = \sin \left(\displaystyle\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin^3 t dt \right) dy \right).$

19 . Donada una funció $f(x)$ definim

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Determineu els punts per als quals $F'(x) = f(x)$ en els casos següents:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & x \ge 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1/n, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$

20 . Calculeu $(f^{-1})'(0)$ per a les funcions:

(a) $f(x) = \int_0^x (1 + \sin(\sin t))dt$.

(b) $f(x) = \int_1^x \sin(\sin t)dt$.

21 . Trobeu una fórmula per a la derivada de la funció

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt,$$

i apliqueu-la per derivar la funció

$$\int_{x^2-1}^{4x^3} \cos(t+1)dt.$$

22 . Calculeu la recta tangent a la gràfica de la funció

$$F(x) = \int_0^x \ln^2(t+e)dt$$

en el punt d'abscisa $x = 0$.

23 . Considereu la funció $F(x)$ definida per a $x \geq 0$ per

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

(a) Proveu que se satisfà la desigualtat

$$\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt$$

$x \geq 1$ i apliqueu-la per a deduir que existeix el límit $\lim_{x\to\infty} F(x)$.

(b) Estudieu la seva derivabilitat i analitzeu la seva gràfica.

24 . Sigui $f(x)$ la funció definida a l'interval $[0, 3]$ per

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq 2, \\ x^2 + x + 1, & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Trobeu una funció $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, $x \neq 2$ i $\int_0^3 F(x)dx = 6$.

25 . Caluleu l'àrea de la figura limitada per una el·lipse de semieixos a, b.

26 . Calculeu làrea de la intersecció del cercle limitat per $x^2+y^2=4$ i la regió limitada per l'el·lipse

$$\frac{1}{16}x^2+y^2=1.$$

27 . Trobeu l'àrea delimitada per les funcions següents:

(a) $y=x^2-1,\ y=-x+2,\ x=0,\ x=1$.

(b) $f(x)=-x^4+4x+1,\ g(x)=x+1$.

(c) $f(x)=2\sin x,\ g(x)=\tan x,\ -\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{\pi}{3}$.

(d) $f(x)=3^x,\ g(x)=2x+1$.

28 . Trobeu el volum del sòlid generat per la regió acotada per les gràfiques de les equacions quan girem al voltant de la recta donada:

(a) $y=\sqrt{x},\ y=0,\ x=3$; recta: $x=3$.

(b) $y=x^2,\ y=4x-x^2$; recta: eix x.

(c) $y=\cos 2x,\ y=0,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{4}$; recta: eix x.

29 . Considereu la meitat superior de l'el·lipse

$$9x^2+25y^2=225, y\geq 0.$$

Calculeu el volum generat al girar al voltant de l'eix x (pilota de rugby) i al girar al voltant de l'eix y (cúpula el·líptica).

30 . Generem un sòlid fent girar la regió limitada per $y=x^2/2$ i $y=2$ al voltant de l'eix y. Taladrem un forat centrat en l'eix de revolució de manera que es perd una quarta part del volum. Trobeu el diàmetre del forat.

31 . Calculeu el volum tancat per un pneumàtic de radi 5, si el radi de la secció transversal és 2.

32 . Un cable elèctric penja entre dues torres que estan a 200 metres de distància. El cable prèn la forma d'una catenària d'equació

$$y=75(e^{x/150}+e^{-x/150})=150\cosh\frac{x}{150}.$$

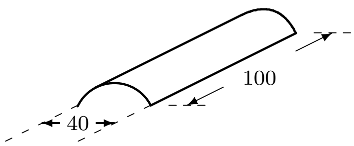
Trobeu la longitud de l'arc del cable entre les dues torres.

33 . Trobeu la longitud de l'astroide

$$x^{2/3}+y^{2/3}=1.$$

34 . Un graner té 100 metres de llarg i 40 d'ample. El sostre té la forma d'una catenària invertida (centrada)

$$y = 31 - 10(e^{x/20} + e^{-x/20}).$$



Calculeu l'àrea de la teulada.

35 . Un mòdul espaial pesa 15 tones mètriques en la superfície de la terra. Calculeu el treball necessari per propulsar-lo a una alçada de 800 milles sobre la terra, (no tingueu en compte la resistència de l'aire ni el pes del combustible).

36 . Una comporta d'una presa vertical té forma de trapezi: 8 *mts* a la part superior, 6 *mts* a la inferior i una alçada de 5 *mts*. Quina és la força del fluid sobre la comporta quan la part superior està 4 *mts* per sota de la superfície de l'aigua?

37 . Analitzeu si les següents integrals impròpies són convergents i, en aquest cas, calculeu el seu valor.

$$(a) \int_1^\infty \frac{4}{x^2+1}dx, \qquad (b) \int_0^\infty e^{-x}\cos x dx,$$
$$(c) \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}dx, \qquad (d) \int_0^{\pi/2} \tan\theta d\theta.$$

38 . Considereu la integral impròpia

$$I_n = \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}}dx.$$

(a) Raoneu que és convergent per a tot $n \geq 1$.

(b) Proveu que la fórmula recurrent

$$I_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right) I_{n-1}.$$

(c) Avalueu les integrals

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^4}dx, \qquad \int_0^\infty \frac{x^3}{(x^2+1)^5}dx.$$

39 . Utilitzeu les funcions d'Euler per calcular les integrals impròpies següents:

$$(a) \int_3^\infty \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{x-3}}, \quad (b) \int_2^5 \frac{(x-2)^3}{\sqrt{5-x}}dx$$

4. Sèries numèriques, aproximació de funcions

1. Utilitzeu inducció per provar que $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$, $n \geq 1$.

2. Proveu per inducció respecte d'n que $n^k + (n-1)^k + \ldots + 2^k + 1^k \leq n^{k+1}$, per a $k \geq 0$ i $n \geq 1$.

3. Proveu per inducció que

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

per a $n \geq 1$ i $x \neq 1$.

4. Proveu per inducció que $1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + \ldots + n \cdot 5^n = \dfrac{5 + (4n-1)5^{n+1}}{16}$, per a $n \geq 1$.

5. En les successions (a) i (b), escriviu els 5 primers termes, i en les successions (c) i (d) doneu una fórmula pel terme general.

$$(a)\ a_1 = 3, a_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2}\right) a_n \qquad (b)\ a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n^2$$

$$(c)\ 2, 5, 8, 11, \ldots \qquad (d)\ 1, -\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \ldots$$

6. Determineu el límit, cas d'existir, de les successions següents:

$$(a)\ a_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}} \qquad (b)\ a_n = \cos\frac{2}{n} \qquad (c)\ a_n = \frac{n^p}{e^n},\ p > 0$$

$$(d)\ a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2n)^n} \qquad (e)\ a_n = \frac{\ln n^3}{2n} \qquad (f)\ a_n = \frac{\cos \pi n}{n^2}$$

7. Calculeu

$$\text{lím}_{\,n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \ldots + \sqrt[n]{e^n}}{n}.$$

8. Siguin $a_0 > b_0 > 0$. Considerem

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0 + b_0}{2}, && \text{mitja aritmètica,} \\ b_1 &= \sqrt{a_0 b_0}, && \text{mitja geomètrica,} \end{aligned}$$

i definim les successions

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \qquad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}.$$

(a) Utilitzeu inducció per provar que $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$.

(b) Raoneu que ambdues successions són convergents i proveu que tenen el mateix límit.

9 . Estudieu la convergència de les sèries següents

$(a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$ $(b)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$ $(c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

$(d)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ $(e)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^2}{(n+1)^2}$ $(f)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n^2}$

$(g)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n3^n}$ $(h)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n}}{(2n+1)!}$ $(i)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$

$(j)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$ $(k)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n!}$ $(l)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{on } a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{\sin n + 1}{\sqrt{n}} a_n$

10 . Doneu una cota superior de l'error en les avaluacions següents:

(a) $\cos(0.3) \approx 1 - \dfrac{(0.3)^2}{2!} + \dfrac{(0.3)^4}{4!}$.

(b) $e \approx 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{5!}$.

11 . Sigui $f(x) = \ln(x+1)$. Aproximeu el valor de $f(0.5)$ amb un error menor de 10^{-4}.

12 . Proveu que si una funció és senar (respectivament parell), aleshores el seu polinomi de Maclaurin de grau n només conté potències senars (respectivament parells) de x.

13 . Trobeu l'interval de convergència de les sèries:

$(a)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n$ $(b)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2n)! \left(\frac{x}{3}\right)^n$ $(c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}$

$(d)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ $(e)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(2n)!}$ $(f)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1) x^n}{n!}$

$(g)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-c)^n}{(2n-1)!!}$ $(h)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^n$ $(i)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}$

14 . Proveu que la funció representada per la sèrie de potències corresponent satisfà l'equació diferencial que l'acompanya:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad y'' + y = 0.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}, \quad y'' - xy' - y = 0.$

15 . Trobeu una sèrie de potències per a cadascuna de les funcions següents centrada en el punt que s'especifica:

(a) $f(x) = \dfrac{5}{2x-3}, \quad c = -3.$

(b) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+2x-3}, \quad c = 0.$

(c) $f(x) = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^2}, \quad x = 0.$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}, \quad x = 0.$

(e) $f(x) = \sqrt[4]{1+x}, \quad x = 0.$

16 . Trobeu la sèrie de Maclaurin per a cadascuna de les funcions:

$(a)\ f(x) = \ln(1+x) \qquad (b)\ f(x) = \cos x^{3/2} \qquad (c)\ f(x) = \cos^2 x$

$(d)\ f(x) = e^{-3x} \qquad (e)\ f(x) = \sinh x \qquad (f)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

17 . Utilitzeu una sèrie de potències per aproximar el valor de la integral amb un error menor de 10^{-4}.

$$(a)\ \int_0^1 e^{-x^3} dx \qquad (b)\ \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \qquad (c)\ \int_0^{0.2} \sqrt{1+x^2} dx.$$

18 . Sigui $\alpha = \arctan(1/5)$. Trobeu $\tan(4\alpha - \pi/4)$ i deduïu que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

Utilitzeu aquesta igualtat per aproximar el valor de π amb un error menor que 10^{-4}.

19 . Considerem una funció *creixent* $f : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Proveu que $f(1) + \ldots + f(n-1) < \int_1^n f(x)dx < f(2) + \ldots + f(n)$.

(b) Sigui $f(x) = \ln x$, proveu les desigualtats

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}.$$

(c) Deduïu que

$$\text{lím}_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

20 . Utilitzeu desenvolupaments en sèrie per calcular els límits a l'origen de les funcions següents

(a) $f(x) = \dfrac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}, \qquad$ (b) $f(x) = \dfrac{\sin^3 x - \sin x^3}{\ln(1+x^5)},$

(c) $f(x) = \dfrac{(x + \sin x)^2 + \sin^3 x}{\sin x^2 + \tan^2 x \arctan x}.$