Continguts

(1) Nombres complexos **3**

(2) Polinomis i fraccions racionals **9**

(3A) Matrius **15**

(3B) Rang d'una matriu **17**

(3C) Determinants **18**

(4A) Sistemes d'equacions lineals **21**

(4B) Inversió de matrius **25**

(4C) Sistemes matricials **26**

(5A-B) Espais vectorials. Bases **31**

(5C) Rang d'una família de vectors **34**

(5D) Canvis de coordenades **36**

(6A) Subespais vectorials **41**

(6B) Subespais definits per equacions **42**

(6C) Subespais definits per generadors **44**

(6D) Intersecció i suma de subespais **46**

(6E) Suma directa **49**

(7A) Aplicacions lineals **51**

(7B) Matrius d'aplicacions lineals **52**

(7C) Canvis de bases **55**

(7D) Operacions amb aplicacions lineals **59**

(7E-F) Nucli i imatge d'una aplicació lineal **60**

(7G) Imatge i antiimatge de subespais **64**

Miscel·lània **67**

(8A) Subespais invariants **73**

(8B) VAPs i VEPs **77**

(8D) Diagonalització **81**

(8E) Matrius no diagonalitzables **87**

(8F) Càlcul Matricial **88**

(8G) El Teorema de Cayley-Hamilton. Polinomi anul.lador **91**

(8H) Miscel·lània **93**

(9A) Equacions en diferències finites lineals **97**

(9B) Sistemes dinàmics discrets lineals **100**

(10A) Equacions diferencials ordinàries lineals amb coeficients constants **107**

(10B) Sistemes lineals a coeficients constants **111**

1. Nombres complexos

1.1. Expresseu en forma polar:

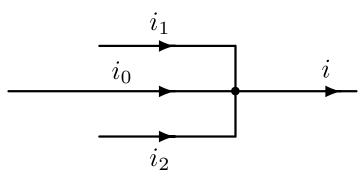
$$i^{23}-1,\quad (1+i)^3,\quad (1+\sqrt{3}i)^7,\quad \frac{(\sqrt{3}+i)^5}{(1-i)^2},\quad \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^6}{(3-3\sqrt{3}i)^4}$$

Solució: En forma exponencial (la polar es dedueix fàcilment de l'exponencial) queda:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^{23}-1 &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}, \\ (1+\mathrm{i})^3 &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}, \\ \left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^7 &= 128\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \\ \frac{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^5}{(1-i)^2} &= 16\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}, \\ \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)^6}{\left(3-3\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2} &= \frac{4}{81}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6}. \end{aligned}$$

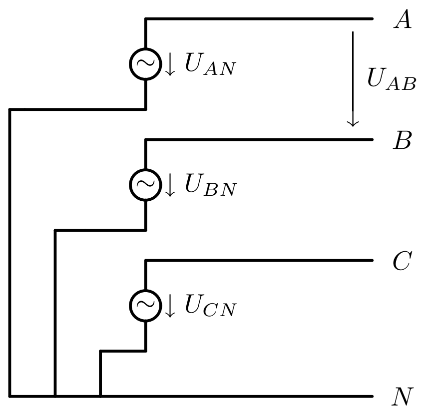
1.2. (*) Mentre que en corrents continus les magnituds elèctriques (tensió, intensitat,...) són representades per nombres reals, en corrents alterns ho són per nombres complexos de la forma $Me^{j\alpha}$. Són vàlides relacions anàlogues a les Lleis de Kirchoff, emprant l'operació suma de complexos:

(a) Calculeu el corrent $I = I_0 + I_1 + I_2$



essent $I_0 = 4$, $\quad I_1 = 3e^{j\pi/3}$, $\quad I_2 = 2e^{j\pi/4}$.

(b) Calculeu la tensió "fase/fase" $U_{AB} = U_{AN} - U_{BN}$



essent les tensions "fase/neutre" $U_{AN} = 120$, $\;U_{BN} = 120e^{-j2\pi/3}$

Solució:

(a) Per sumar nombres complexes passem de forma exponencial a forma binòmica:

$$\begin{aligned} I_0 &= 4, \\ I_1 &= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + ju\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), \\ I_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + ju\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

Sumem per separat les parts reals i les imaginàries:

$$\text{Re} = 4 + \frac{3}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}, \qquad \text{Im} = ju\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}.$$

En forma exponencial resulta:

$$I = 8\,\mathrm{e}^{ju\pi/6}.$$

(b) Com abans, hem de passar de la forma exponencial a la forma binòmica:

$$\begin{aligned} U_{AN} &= 120, \\ U_{BN} &= -60 - ju60\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Restem per separat les parts reals i les imaginàries:

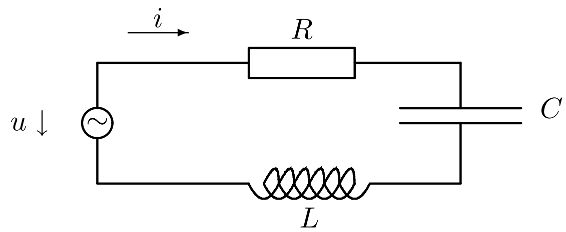
$$\text{Re} = 180, \qquad \text{Im} = ju60\sqrt{3}.$$

En forma exponencial resulta:

$$U_{AB} = 8\,\mathrm{e}^{ju\pi/6}.$$

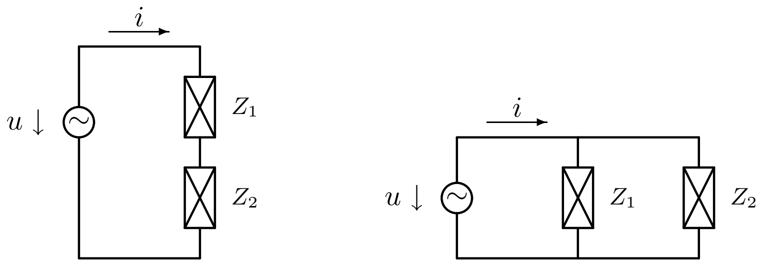
1.3. (*) En corrents alterns, la relació anàloga a la Llei d'Ohm resulta $U = ZI$, on ara les magnituds U (tensió), I (intensitat) i Z (impedància) són nombres complexos.

Així, per un circuit R–L–C com el de la figura, resulta $Z_{RLC} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

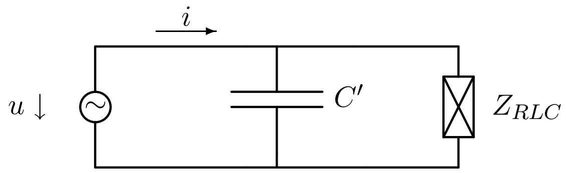


(a) Demostreu que, de forma anàloga als corrents continus, per a les connexions en sèrie i paral·lel resulta

$$Z_S = Z_1 + Z_2 \qquad\qquad \frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$



(b) Calculeu C' per tal que, en el circuit de la figura, resulti $U/I \in \mathbb{R}$



(*Nota*: aquesta condició és la que maximitza la potència activa en el circuit; raoneu que sempre és possible aconseguir-ho mitjançant una C' adequada, qualsevol que sigui la impedància Z inicial)

Solució:

(a) Connexió en serie (mateixa intensitat):

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = Z_1 I \\ U_2 = Z_2 I \end{array}\right\} \begin{array}{l} U = U_1 + U_2 \\ U = Z_1 I + Z_2 I \end{array}$$

$$\frac{U}{I} = Z_1 + Z_2$$

Connexió en paral·lel (mateixa tensió):

$$\left.\begin{array}{l} U = Z_1 I_1 \\ U = Z_2 I_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} I = I_1 + I_2 \\ I = \dfrac{U}{Z_1} + \dfrac{U}{Z_2} \end{array} \qquad\qquad \frac{U}{I} = \frac{1}{\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}}$$

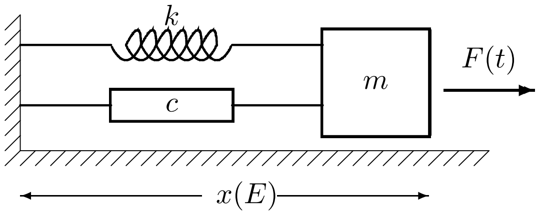
(b) Utilitzant el trobat a l'apartat anterior (connexió en paral·lel d'impedàncies):

$$\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{1}{C'\omega}, \\ Z_2 &= Z_{ZLC} = R + ju\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right). \end{aligned}$$

La impedància serà real si, i només si, la seva inversa també ho és. Per tant només cal que s'iguali a zero la part imaginària de $\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}$, obtenint:

$$C' = \frac{L\omega^2 C^2 - C^3\omega^2 R^2 - C}{(C\omega^2 L - 1)^2}$$

1.4. (**) Per a un mecanisme oscil.latori com el de la figura



resulta l'equació diferencial següent

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)\,.$$

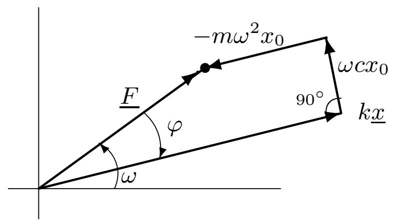
Si la força aplicada és de la forma $F(t) = F_0\, e^{j\omega t}$, resulta $x(t) = x_0\, e^{j(\omega t+\varphi)}$.

(a) Si representem aquestes magnituds pels fasors $\underline{F} = F_0\, e^{j\omega}$, $\underline{x} = x_0\, e^{j(\omega+\varphi)}$, raoneu que venen relacionats per: $\underline{F} = (k + j\omega c - m\omega^2)\underline{x}$.

(b) Apliquem-ho per calcular φ quan $\underline{x} = 2 + j\,,\ k = 3\,,\ \omega c = 2\,,\ m\omega^2 4$.

Solució:

(a)



(b) $\underline{F} = 3(2+j) + 2(-1+2j) + 4(-2-j) = -4+3j$

$$\varphi = \arg\frac{\underline{F}}{\underline{x}} = \arg\frac{-4+3j}{2+j} = \arg\,(-1+2j) = -\arctan 2\,.$$

1.5. Calculeu les arrels de l'equació $x^2 - (1+i)x + i = 0$.

Solució: $x = \dfrac{1+i \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4i}}{2} = \dfrac{1+i \pm \sqrt{-2i}}{2} = \dfrac{1+i \pm (-1+i)}{2} = \begin{smallmatrix} \nearrow i \\ \searrow 1 \end{smallmatrix}\,.$

1.6. Calculeu:

$$\sqrt{i},\quad 1 - \sqrt[3]{i},\quad e^{-i\frac{\pi}{3}}(1 - (1+i)^3),\quad \frac{(1+i)^{100}}{(1+\sqrt{3}i)^{50}},\quad (1+\sqrt{3}i)^3 - (1-\sqrt{3}i)^3$$

Solució: Els resultats expressats en forma binomial són:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathrm{i}} &= \pm\left(\sqrt{2}/2+\mathrm{i}\sqrt{2}/2\right), \\
1-\sqrt[3]{\mathrm{i}} &= 1-\sqrt{3}/2-\mathrm{i}/2,\ 1+\sqrt{3}/2-\mathrm{i}/2,\ 1+\mathrm{i}, \\
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}\left(1-(1+\mathrm{i})^3\right) &= \frac{3-2\sqrt{3}}{2}-\frac{2+3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \\
\frac{(1+\mathrm{i})^{100}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{50}} &= 1/2+\mathrm{i}\sqrt{3}/2, \\
\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^3-\left(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^3 &= 0.
\end{aligned}$$

1.7. (**) Durant més de la meitat del S.XX, el preu de la carn de tocino als USA va experimentar variacions cícliques quadrianuals (corresponents a 8 cicles semestrals de producció) d'amplitud constant, generant grans distorsions econòmiques als productors. Un model matemàtic per explicar-ho (i intentar corregir-ho), basat en la hipòtesi de que els productors utilitzen com preu de referència per a les seves produccions la mitjana de les darreres 5 temporades, condueix a que el preu en la temporada k ve donat per

$$p(k)=\sum_i c_i\lambda_i^k\,,\quad k=1,2,\ldots$$

on λ_i són les arrels complexes del polinomi

$$t^6+\frac{\alpha}{5}(t^4+t^3+t^3+t+1)=0$$

essent α un paràmetre susceptible de ser regulat mitjançant polítiques adequades

(a) Verifiqueu que, efectivament, les arrels λ_i de mòdul 1 generen oscil·lacions quadrianuals.

(b) Determineu el valor de α per al qual apareixen aquestes solucions.
Nota: la política econòmica ha de procurar, doncs, evitar aquests valors de α.

1.8. Trobeu $a\in\mathbb{R}$ per tal que $\dfrac{1+2ai}{1-3i}\in\mathbb{R}$.

Solució: $a=-3/2$.

1.9. (a) Si z_1,z_2,z_3,z_4 són les arrels quartes de 1, calculeu la seva suma $z_1+z_2+z_3+z_4$.

(b) En general, calculeu la suma de les n arrels n-èsimes d'un complex qualsevol $z\in\mathbb{C}$.

Solució: Sumen 0, per a tot $z\in\mathbb{C}$ i $n\in\mathbb{N}$.

1.10. (a) Si z_1,z_2,z_3,z_4 són les arrels quartes de $z\in\mathbb{C}$, calculeu el seu producte $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4$.

(b) En general, calculeu el producte de les n arrels n-èsimes d'un complex qualsevol $z\in\mathbb{C}$.

Solució:

(a) $-z$.

(b) $z_1 \dots z_n = (-1)^{n-1} z$.

1.11. Trobeu $z \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{z} = z^5$.

Solució: El zero i les sis arrels sisenes de la unitat. És a dir, $z = 0$ i $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/3}$ amb $k = 0, \dots, 5$.

1.12. Si $z_1, \dots, z_8 \in \mathbb{C}$ són les arrels vuitenes de 1, calculeu quan val $z_1 + \dots + z_8$.

Solució: La suma dóna zero. De fet, la suma de les n arrels n-enèsimes d'un número complex sempre dóna zero.

1.13. (opt) Descriviu geomètricament el conjunt dels nombres complexos que satisfan $(z - \overline{z})^2 = i^2 |z|^2$.

Solució: Un número complex z compleix l'equació $(z - \bar{z})^2 = \mathrm{i}^2 z^2$ si i només si $\Re z = \pm\sqrt{3} \mathrm{Im}\ z$. Obtenim per tant el parell de rectes que passen per l'origen i formen un angle de $\pi/6$ radians (és a dir, trenta graus) amb l'eix real.

1.14. (opt) Trobeu $z \in \mathbb{C}$ tal que formi, junt amb $1 + 2i$, $2 - 3i$ un triangle equilàter.

Solució: Hi ha dues solucions:

$$z = \frac{3 + 5\sqrt{3}}{2} - \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \qquad z = \frac{3 - 5\sqrt{3}}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

1.15. (opt) Quins nombres complexos hi ha tals que ells amb la seva suma i el seu producte formin un quadrat?

Solució: Hi ha dues solucions. La primera està formada pels números 2 i $1 + \mathrm{i}$. La segona està formada pels números 2 i $1 - \mathrm{i}$.

1.16. (opt) Si $A = (3, 2)$ i $C = (1, 4)$ són dos vèrtexs oposats d'un rombus, trobeu els altres dos vèrtexs, sabent que la diagonal BD és doble que la AC.

Solució: $B = (4, 5)$ i $D = (0, 1)$.

1.17. (opt) Un triangle té vèrtexs $A = (0, 0)$, $B = (3, 1)$. Trobeu el tercer vèrtex C sabent que $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$ i que $\| \overrightarrow{AC} \| = 2 \| \overrightarrow{AB} \|$.

Solució: Hi ha dues solucions: $C = 2\sqrt{2}(1 + 2\mathrm{i})$ i $C = 2\sqrt{2}(2 - \mathrm{i})$.

1.18. (opt) Trobeu un nombre complex tal que ell i les seves tres arrels cúbiques formin un rombe.

Solució: Hi ha dues solucions: $z = \pm 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

2. Polinomis i fraccions racionals

2.1. Sigui el polinomi $P(t) = t^5 - 5t^4 + 7t^3 - 2t^2 + 4t - 8$.

(a) Calculeu $P(2)$, $P'(2)$, $P''(2)$, $P'''(2)$. Què es pot deduir ?

(b) Descomponeu $P(t)$ en factors primers a $\mathbb{R}[t]$ i a $\mathbb{C}[t]$.

Solució:

(a) $P(2) = P'(2) = P''(2) = 0$ i $P'''(2) = 42 \neq 0$. Es dedueix que $t = 2$ és una arrel triple del polinomi $P(t)$.

(b) $P(t) = (t-2)^3(t^2+t+1)$ en $\mathbb{R}[t]$.
$P(t) = (t-2)^3 \left(t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$ en $\mathbb{C}[t]$.

2.2. Donat el polinomi $P(t) = t^4 - \lambda t^3 + \mu t - 1$, quins són els valors de λ i μ per a que 1 sigui arrel triple?

Solució: $\lambda = \mu = 2$.

2.3. Donat el polinomi $t^5 - 5t - a \in \mathbb{R}[t]$, per a quins valors de a pot tenir arrels múltiples ? De quina multiplicitat ?

Solució: Si $a = -4$, aleshores $t = 1$ és una arrel doble. Si $a = 4$, aleshores $t = -1$ és una arrel doble. No hi ha més possibilitats.

2.4. Sigui $P(t) = \dfrac{t^n}{n!} + \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + 1$. Té arrels múltiples? En cas afirmatiu, doneu-les.

Solució: $P(t) = \sum_{j=0}^{n} \dfrac{t^j}{j!}$ no té arrels múltiples.

2.5. Doneu el desenvolupament de Taylor del polinomi $P(t) = t^5 + 4t^4 - t^3 + 2t^2 + t + 1$ en el punt $t = 1$. Quina és la resta de dividir $P(t)$ per $(t-1)^3$?

Solució: $P(t) = 8 + 23(t-1) + 33(t-1)^2 + 25(t-1)^3 + 9(t-1)^4 + (t-1)^5$. El reste de dividir $P(t)$ entre $Q(t) = (t-1)^3$ és $R(t) = 8 + 23(t-1) + 33(t-1)^2$.

2.6. Trobeu el valor de a per a que els polinomis $P(t) = t^4 - t + a$,

$Q(t) = t^2 - at + 1$, tinguin dues arrels comuns.

Solució: Hi ha dues solucions: $a = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

2.7. Determineu m per a que els dos polinomis de $\mathbb{R}[t]$ següents:

$P(t) = t^3 + mt - 6$, $Q(t) = t^2 + mt - 2$ tinguin una arrel en comú.

Solució: Si $m = -1$, aleshores $t = 2$ és una arrel comú. És l'única possibilitat.

2.8. Descomponeu el polinomi $P(t) = t^4 + 12t - 5 \in \mathbb{R}[t]$ en dos factors pertanyents també a $\mathbb{R}[t]$, sabent que $P(t)$ té dues arrels t_1, t_2 la suma de les quals val 2.

Solució: $P(t) = t^4 + 12t - 5 = (t^2 - 2t + 5)(t^2 + 2t - 1)$.

2.9. Trobeu tots els polinomis $P(t)$ de $\mathbb{R}_7[t]$ tals que $P(t)+1$ sigui divisible per $(t-1)^4$ i que $P(t)-1$ ho sigui per $(t+1)^4$.

Solució: $P(t) = (5t^7 - 21t^5 + 35t^3 - 35t)/16$.

2.10. (a) Determineu la resta de la divisió de $P(t) = t^{2n} + nt^{n+1} - 3t + 2$ per $(t-1)^2$.

(b) Proveu que $P(t) = nt^{n+2} - (n+2)t^{n+1} + (n+2)t - n$ és divisible per $(t-1)^3$.

Solució:

(a) El resto de dividir $P(t) = t^{2n} - nt^{n+1} - 3t + 2$ entre $Q(t) = (t-1)^2$ és $R(t) = (n^2 + 3n - 3)(t-1) + n = (n^2 + 3n - 3)t - n^2 - 2n + 3$.

(b) El resto de dividir $P(t) = nt^{n+2} - (n+2)t^{n+1} + (n+2)t - n$ entre $Q(t) = (t-1)^3$ és $R(t) = 0$. És a dir, $Q(t)$ divideix a $P(t)$.

2.11. (a) La resta de dividir un polinomi $P(t)$ per $t - 1$ és 4 i la resta de dividir-lo per $t - 2$ és 5. Calculeu la resta de dividir-lo per $(t-1)(t-2)$.

(b) La resta de dividir un polinomi $P(t)$ per $t^2 - 1$ és $2t$ i la resta de dividir-lo per t és 1. Calculeu la resta de dividir-lo per $t^3 - t$.

Solució:

(a) El reste de dividir $P(t)$ entre $Q(t) = (t-1)(t-2)$ és $R(t) = t + 3$.

(b) El reste de dividir $P(t)$ entre $Q(t) = t^3 - t$ és $R(t) = -t^2 + 2t + 1$.

2.12. Calculeu $\displaystyle\int \frac{t^3 + 2t^2 + 2t + 2}{(t^2+1)^2} dt$ mitjançant la descomposició en fraccions simples de la fracció racional a primitivar.

Solució: $\displaystyle\frac{t^3 + 2t^2 + 2t + 2}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{t+2}{t^2+1}$

$$\int \frac{t^3 + 2t^2 + 2t + 2}{(t^2+1)^2} = \int \frac{t}{(t^2+1)^2} + \int \frac{t}{t^2+1} + \int \frac{2}{t^2+1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + 2\arctan t + C.$$

2.13. Descomponeu en fraccions simples sobre $\mathbb{R}$ i sobre $\mathbb{C}$ les fraccions racionals

$$\frac{-50t - 10}{(t-1)^2(t+2)(t^2+1)}, \qquad \frac{3t^2 + 1}{t^3 - 6t^2 + 11t - 6},$$

$$\frac{22 - 53t}{t^5 - 5t^4 + 7t^3 - 2t^2 + 4t - 8}, \qquad \frac{1}{t^3 - 3at^2 + (1 + 3a^2)t - (a^3 + a)}.$$

Solució: La primera descomposició ve donada per

$$\begin{aligned}\frac{-50t-10}{(t-1)^2(t+2)(t^2+1)} &= \frac{-10}{(t-1)^2}+\frac{5}{t-1}+\frac{2}{t+2}+\frac{9-7t}{t^2+1}\\ &= \frac{-10}{(t-1)^2}+\frac{5}{t-1}+\frac{2}{t+2}-\frac{\frac{7}{2}-\frac{9}{2}\mathrm{i}}{t+\mathrm{i}}-\frac{\frac{7}{2}+\frac{9}{2}\mathrm{i}}{t-\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

Usant que $t^3-6t^2+11t-6=(t-1)(t-2)(t-3)$, obtenim

$$\frac{3t^2+1}{t^3-6t^2+11t-6} = \frac{2}{t-1}-\frac{13}{t-2}+\frac{14}{t-3}.$$

Usant que $t^5-5t^4+7t^3-2t^2+4t-8=(t-2)^3(t^2+t+1)$, obtenim

$$\begin{aligned}\frac{22-53t}{t^5-5t^4+7t^3-2t^2+4t-8} &= \frac{1}{t-2}+\frac{1}{(t-2)^2}-\frac{12}{(t-2)^3}-\frac{4+t}{t^2+t+1}\\ &= \frac{1}{t-2}+\frac{1}{(t-2)^2}-\frac{12}{(t-2)^3}-\frac{\alpha}{t-\beta}-\frac{\bar\alpha}{t-\bar\beta},\end{aligned}$$

on $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$, $\bar\alpha=\frac{1}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$, $\beta=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ i $\bar\beta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
Usant que $t^3-3at^2+(1+3a^2)t-(a^3+a)=(t-a)(t^2-2at+1+a^2)$, obtenim

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^3-3at^2+(1+3a^2)t-(a^3+a)} &= \frac{1}{t-a}-\frac{t-a}{t^2-2at+(1+a^2)}\\ &= \frac{1}{t-a}-\frac{1/2}{t-a-\mathrm{i}}-\frac{1/2}{t-a+\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

2.14. Descomponeu sobre $\mathbb{C}$ la fracció racional $\frac{1}{(t-a)^8(t-b)^4}$ utilitzant el desenvolupament de Taylor de $f(t)=\frac{1}{(t-a)^8}$ i $g(t)=\frac{1}{(t-b)^4}$ en els punts $t=b$ i $t=a$, respectivament.

Solució: La descomposició és

$$\begin{aligned}\frac{1}{(t-a)^8(t-b)^4} = \; & \frac{g(a)}{(t-a)^8}+\frac{g'(a)}{(t-a)^7}+\cdots+\frac{g^{(6)}(a)/6!}{(t-a)^2}+\frac{g^{(7)}(a)/7!}{t-a}+\\ &+\frac{f(b)}{(t-b)^4}+\frac{f'(b)}{(t-b)^3}+\frac{f''(b)/2}{(t-b)^2}+\frac{f^{(3)}(b)/3!}{t-b},\end{aligned}$$

on $f(t)=(t-a)^{-8}$ i $g(t)=(t-b)^{-4}$.

2.15. (*) ("Spline" de campana). Siguin α i β dos nombres reals.

(a) Proveu que existeixen uns únics polinomis $Q(t), R(t) \in \mathbb{R}_3[t]$ tals que

$$Q(-1) = \alpha, \quad Q(0) = 1 = R(0), \quad Q'(0) = 0 = R'(0), \quad Q''(0) = 2\gamma = R''(0), \quad R(1) = \beta\,.$$

Calculeu explícitament els polinomis $Q(t)$ i $R(t)$ en funció de α, β i γ.

(b) Proveu que existeix un únic polinomi $P(t) \in \mathbb{R}_3[t]$ tal que

$$P(-2) = 0, \qquad P'(-2) = 0, \qquad P''(-2) = 0, \qquad P(-1) = \alpha\,.$$

Calculeu explícitament el polinomi $P(t)$ en funció de α.

(c) Anàlogament, calculeu l'únic polinomi $S(t) \in \mathbb{R}_3[t]$ tal que

$$S(2) = 0, \qquad S'(2) = 0, \qquad S''(2) = 0, \qquad S(1) = \beta\,.$$

(d) Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida a trossos mitjançant les fórmules

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{quan} \quad t \le -2 \\ P(t), & \text{quan} \quad -2 \le t \le -1 \\ Q(t), & \text{quan} \quad -1 \le t \le 0 \\ R(t), & \text{quan} \quad 0 \le t \le 1 \\ S(t), & \text{quan} \quad 1 \le t \le 2 \\ 0, & \text{quan} \quad t \ge 2 \end{cases}$$

Quan $f \in C^1(\mathbb{R})$? Quan $f \in C^2(\mathbb{R})$? Quan $f \in C^3(\mathbb{R})$? Especifiqueu en cada cas els valors de α i β per als quals es compleixen aquestes condicions.

(e) Dibuixeu la gràfica de la funció $f(t)$ per als valors de αi β tals que $f \in C^2(\mathbb{R})$.

(Indicació: La funció $f(t)$ s'anomena *spline de campana*. El terme campana fa referència a la forma de la seva gràfica).

Solució:

(a) $Q(t) = (-\alpha + 1 + \gamma)t^3 + \gamma t^2 + 1$, $\qquad R(t) = (\beta - \gamma - 1)t^3 + \gamma t^2 + 1\,.$

(b) $P(t) = \alpha(t^3 + 6t^2 + 12t + 8)\,.$

(c) $S(t) = \beta(-t^3 + 6t^2 - 12t + 8)\,.$

(d) $f \in C^1(\mathbb{R})$ sempre; $\quad f \in C^2(\mathbb{R})$ si $\alpha = \beta$ i $\gamma = 6\beta - 3$; $\quad f \in C^2(\mathbb{R})$ si $\alpha = \beta = \dfrac{1}{4}$ i $\gamma = -\dfrac{3}{2}$.

2.16. (**opt.**) Donat $P(t) = t^5 - a$, $a \neq 0$; $Q(t) = t^3 - b$, $b \neq 0$.

(a) Quina relació han de verificar a, b per a que MCD $(P(t), Q(t))$ sigui un polinomi de grau 1?

(b) Doneu per a aquests casos MCD $(P(t), Q(t))$ i MCM $(P(t), Q(t))$.

(c) Calculeu MCD $(t^5 - 32, t^3 - 8)$, MCM $(t^5 - 32, t^3 - 8)$, aplicant b).

Solució:

(a) $b^5 = a^3$.

(b) m.c.d.$[t^5 - a, t^3 - b] = t - a^{-1}b^2$.
m.c.m.$[t^5 - a, t^3 - b] = t^7 + a^{-1}b^2t^6 + a^{-2}b^4t^5 - at^2 - b^2t - a^{-1}b^4$.

(c) m.c.d.$[t^5 - 32, t^3 - 8] = t - 2$.
m.c.m.$[t^5 - 32, t^3 - 8] = t^7 + 2t^6 + 4t^5 - 32t^2 - 64t + 128$.

2.17. (**opt.**) Calculeu el MCD $(P(t), Q(t))$ i el MCM $(P(t), Q(t))$ amb

(a) $P(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 2$ i $Q(t) = t^2 - 4t + 4$.

(b) $P(t) = t^5 - 3t^4 + 2t^3 + 2t^2 - 3t + 1$ i $Q(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$.

(c) $P(t) = t^4 - t^3 - 3t^2 + 5t - 2$ i $Q(t) = t^2 - 6t + 9$.

Trobeu en cada cas, polinomis $P_1(t)$, $Q_1(t)$ tals que

$$P_1(t)P(t) + Q_1(t)Q(t) = MCD(P(t), Q(t)).$$

Solució:

(a) m.c.d.$[P(t), Q(t)] = t - 2$.
m.c.m.$[P(t), Q(t)] = t^4 - 5t^3 + 9t^2 - 8t + 4$.
$P_1(t) = \dfrac{1}{3}$ i $Q_1(t) = -\dfrac{1}{3}(t + 1)$.

(b) m.c.d.$[P(t), Q(t)] = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t - 1)^3$.
m.c.m.$[P(t), Q(t)] = t^6 - 6t^5 + 11t^4 - 4t^3 - 9t^2 + 10t - 3$.
$P_1(t) = \dfrac{1}{8}$ i $Q_1(t) = -\dfrac{1}{8}(t + 3)$.

(c) m.c.d.$[P(t), Q(t)] = 1$; és a dir, els polinomis són primers.
m.c.m.$[P(t), Q(t)] = P(t) \cdot Q(t) = t^6 - 7t^5 + 12t^4 + 14t^3 - 59t^2 + 57t - 18$.
$P_1(t) = \dfrac{1}{400}(61 - 17t)$ i $Q_1(t) = \dfrac{1}{400}(17t^3 + 24t^2 + t + 58)$.

2.18. (**opt.**) Es considera $P(t) = t^3 + t^2 - 8t - 12 \in \mathbb{R}[t]$

(a) Determineu $P'(t)$ i doneu la seva descomposició en factors primers.

(b) Proveu que una de les arrels de $P'(t)$ ho és també de $P(t)$, i deduïu la seva descomposició en factors primers de $P(t)$.

(c) Calculeu MCD $(P(t), P'(t))$.

(d) Determineu $P_1(t)$ i $Q_1(t)$ tals que $P_1(t)P(t) + Q_1(t)P'(t) = MCD(P(t), P'(t))$.

Solució:

(a) $P'(t) = 3t^2 + 2t - 8 = 3(t + 2)(t - 4/3)$.

(b) L'arrel comú és $t = -2$. A més, $P(t) = (t + 2)^2(t - 3)$.

(c) m.c.d.$[P(t), P'(t)] = t + 2$.

(d) $P_1(t) = -\dfrac{9}{50}$ i $Q_1(t) = \dfrac{1}{50}(3t + 1)$.

3. Matrius. Determinants. Rang d'una matriu

(3A) Matrius.

3.1. Siguin $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Proveu que

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 \iff AB = BA$$

Solució: $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$.

3.2. Demostreu que són nilpotents les matrius

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Més en general, demostreu que ho és tota matriu estrictament triangular.

3.3. Demostreu que són simètriques les matrius $A + A^t$ i $B\,B^t$, qualsevol que siguin $A \in M_n$, $B \in M_{n\times m}$.

3.4. (*) La transformació que descompon en monofàsics un operador d'inductàncies és
$F = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}$, essent $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^3 = 1$, $\alpha \neq 1$. Calculeu F^4.

Solució: $F^4 = I$.

3.5. Demostreu que la matriu triangular per blocs $A = \begin{pmatrix} P & R \\ O & Q \end{pmatrix}$ és invertible si, i només si, ho són P i Q, i que aleshores

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}RQ^{-1} \\ O & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

3.6. Calculeu la potència k-èsima de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & & 0 \\ 1 & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Solució: $A = \lambda I + N$, amb $N = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sabem:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \dots$$

Aplicant el binomi de Newton:

$$A^k = (\lambda I + N)^k = \binom{k}{0}(\lambda I)^k + \binom{k}{1}(\lambda I)^{k-1}N + \cdots + \binom{k}{k}N^k = \lambda^k I + \binom{k}{1}\lambda^{k-1}N + \cdots$$

3.7. (**) El model probabilístic de Jukes-Cantor descriu el procés de transformació de cadenes d'ADN formades per 4 nucleòtids mitjançant una matriu del tipus

$$M = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha/3 & \alpha/3 & \alpha/3 \\ \alpha/3 & 1-\alpha & \alpha/3 & \alpha/3 \\ \alpha/3 & \alpha/3 & 1-\alpha & \alpha/3 \\ \alpha/3 & \alpha/3 & \alpha/3 & 1-\alpha \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{4}{3}\alpha\right) I + \frac{\alpha}{3} U$$

on $0 < \alpha \leq \frac{3}{4} i$ i on U és la matriu amb tots els coeficients 1.

(a) Demostreu que les seves potències també són del tipus Jukes-Cantor. Concretament:

$$M^k = \left(1 - \frac{4}{3}\alpha_k\right) I + \frac{\alpha_k}{3} U, \qquad \alpha_k = \frac{3}{4}\left(1 - \left(1 - \frac{4}{3}\alpha\right)^k\right).$$

(b) Discutiu per a quins valors de α és M invertible.

Solució: Com que I, U permuten, podem aplicar el binomi de Newton:

$$\begin{aligned} M^k &= \left(1 - \frac{4}{3}\alpha\right)^k I + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \left(1 - \frac{4}{3}\alpha\right)^j \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{k-j} U^{k-j} = \\ &= \left(1 - \frac{4}{3}\alpha\right)^k I + U \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \left(1 - \frac{4}{3}\alpha\right)^j \left(\frac{4}{3}\alpha\right)^{k-j} = \\ &= \left(1 - \frac{4}{3}\alpha\right)^k I + U \frac{1}{4}\left(1 - \left(1 - \frac{4}{3}\alpha\right)^k\right) \end{aligned}$$

(3B) Rang d'una matriu

3.11. (*) Un sistema de control

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A \in M_n\,, \;\; B \in M_{n\times m}\,,$$

resulta ser "controlable" (és a dir, tot canvi en els valors de x és factible mitjançant un control $u(t)$ adequat) si, i només si, és màxim el rang de l'anomenada "matriu de controlabilitat"

$$K = (B,\; AB,\; A^2B, \ldots,\; A^{n-1}B)\,.$$

(a) Discutiu per a quins valors de α, $\beta \in \mathbb{R}$ és controlable el sistema definit per

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Discutiu per a quins valors de α, $\beta \in \mathbb{R}$ és controlable amb només el segon control, és a dir, quan en lloc de la matriu B original es considera només la matriu columna $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) En general, els "índex de controlabilitat" venen determinats pels rangs de les matrius

$$B\,, \quad (B,\; AB)\,, \quad (B,\; AB,\; A^2B), \ldots, \quad K\,.$$

Calculeu aquests rangs, en funció dels paràmetres $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, per al sistema definit per

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix} \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \gamma \\ 0 & \delta \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right).$$

Solució:

(a) És controlable per a tot valor de α i β.

(b) És controlable per a $\beta \neq 0$.

(c) rang $(B) = 2$, rang $(B, AB) = 4$.

Si $\gamma = \delta = 0$: rang $(B, AB, A^2B) = 5$, rang $(B, \ldots, A^3B) = 6$, rang $(B, \ldots, A^4B) = 7$

Si $\gamma\delta \neq 0$: rang $(B, AB, A^2B) = 6$, rang $(B, \ldots, A^3B) = 7$.

3.12. Donat $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ qualsevol, siguin a, b, c definits per:

$$(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma) = t^3 + at^2 + bt + c\,.$$

Calculeu el rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \\ -c & -b & -a-\alpha \end{pmatrix}.$$

Solució: Clarament: $a = -(\alpha+\beta+\gamma)$, $b = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $c = -\alpha\beta\gamma$. Si en A pivotem la primera fila sobre la tercera, resulta

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha(\beta+\gamma) & \beta+\gamma \end{pmatrix}.$$

Pivotant ara la segona resulta fàcilment: rang $A = 2$.

3.13. Discutiu, en funció dels valors de $\alpha, \beta \in R$, el rang de la matriu

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Solució: 0 si $\alpha = \beta = 0$; 1 si $\alpha = \beta \neq 0$; 2 si $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$; 3 si $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \beta$.

(3C) Determinants.

3.21. Calculeu els següents determinants:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 8 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} \cos x & e^{ix} & e^{-ix} \\ \cos 2x & e^{2ix} & e^{-2ix} \\ \cos 3x & e^{3ix} & e^{-3ix} \end{vmatrix}$

Solució:

(a) 1.

(b) 131.

(c) $(x-1)^3(x+3) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$.

(d) 0, ja que la quarta fila és la semisuma de la tercera i la cinquena.

(e) 0, ja que la segona columna és la semisuma de la primera i la tercera.

(f) 0, ja que la primera columna és la semisuma de les altres dues.

3.22. Sabent que els nombres 58.786, 30.628, 12.831, 80.743 i 16.016 són tots divisibles per 13, demostreu que el determinant de la següent matriu és, també, divisible per 13:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Solució: El determinant d'una matriu no canvia si a una de les seves columnes li sumem una combinació lineal de les altres columnes. Per tant, podem substituir la cinquena columna de la matriu A per

$$c_5' = c_5 + 10c_4 + 100c_3 + 1000c_2 + 10000c_1 = \begin{pmatrix} 58786 \\ 30628 \\ 12831 \\ 80743 \\ 16016 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4522 \times 13 \\ 2356 \times 13 \\ 987 \times 13 \\ 6211 \times 13 \\ 1232 \times 13 \end{pmatrix}.$$

Finalment, traiem el 13 com factor comú de la cinquena columna i notem que el determinant de la matriu que queda és un número enter, ja que tots els seus elements són enters.

3.23. Demostreu que:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)(b-d)(c-d)(a-d).$$

Solució: Una manera de començar consisteix en restar-li la primera fila a totes les altres. Al fer això, en cada una de les últimes files apareix un factor comú que es pot treure fora del determinant: $(a-b)$ en la segona, $(a-c)$ en la tercera i $(a-d)$ en la quarta. A més, podem desenvolupar el determinant per la tercera columna que ha quedat plena de zeros. El problema se acaba efectuant operacions similars.

3.24. (a) Calculeu els anomenats " determinants de Van der Monde"

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 \\ 1 & x_3 & (x_3)^2 \end{vmatrix}, \quad D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^{n-1} \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^{n-1} \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(b) Deduïu que hi ha un únic polinomi $P(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tal que en els punts $x_1, \dots, x_n$ prengui valors $y_1, \dots, y_n$ arbitraris prefixats.

Solució: $D_2 = x_2 - x_1$. $D_3 = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$. $D_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$.

3.25. (a) Demostreu que si $a_{jj} \neq 0$ per a tot j, aleshores:

$$\begin{vmatrix} \alpha & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left(\alpha - \sum_{j=1}^{n} \frac{(a_j)^2}{a_{jj}} \right) \left(\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \right).$$

(b) Apliqueu aquest resultat al càlcul de: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Solució:

(a) Només cal convertir la matriu donada en una matriu triangular inferior, restant-li a la primera fila els múltiples adequats de totes las altres files.

(b) -27.

4. Sistemes d'equacions lineals. Inversió de matrius. Sistemes matricials

(4A) Sistemes d'equacions lineals.

4.1. Discutiu i resoleu en $\mathbb{R}$ els sistemes d'equacions següents:

$$\text{(a)} \quad \left.\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 3 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 4 \end{array}\right\} \qquad \text{(b)} \quad \left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{array}\right\}$$

i doneu una base dels subespais de solucions dels sistemes homogenis associats.

Solució:

(a) El sistema és compatible determinat, essent la seva solució $x_1 = 2,\ x_2 = 0$ i $x_3 = -1$.

(b) El sistema és compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat, essent les seves solucions $x_1 = 1 - 2x_4 - \frac{3}{2}x_5,\ x_2 = \frac{2}{3} - \frac{11}{3}x_4 - \frac{3}{2}x_5,\ x_3 = \frac{1}{3} - \frac{7}{3}x_4 - \frac{1}{2}x_5,\ x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

4.2. Resoleu en $\mathbb{R}$ els següents sistemes, discutint-los segons els valors de $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\text{(a)} \quad \left.\begin{array}{r} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{array}\right\} \qquad \text{(b)} \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = 1 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 1 \end{array}\right\}$$

Solució:

(a) La resolució completa és molt llarga. La discussió de casos és la següent.

Caso	Discussió
$a = 1$ i $b = 1$	Compatible indeterminat amb 3 graus de llibertat
$a = 1$ i $b \neq 1$	Incompatible
$a = -3$ i $b = -1$	Compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat
$a = -3$ i $b \neq -1$	Incompatible
$a \neq 1, -3$	Compatible determinat

(b) Al igual que en l'apartat anterior, ens limitem a discutir el sistema.
Si $a \neq b \neq c \neq a$, el sistema és compatible determinat.
Si $a = b,\ a = c$ o $b = c$, però cap dels números a, b, c és igual a un, el sistema és incompatible.
Si $a = b,\ a = c$ o $b = c$, i algun dels números a, b, c és igual a un, el sistema és compatible indeterminat.

4.3. Siguin $a_1, \ldots, a_n$ elements de $\mathbb{R}$; resoleu i discutiu el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_1 + x_3 = a_2 \\ \cdots \\ x_1 + x_{n+1} = a_n \\ x_1 + \cdots + x_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n \end{array}\right\}$$

Solució: El sistema és compatible i determinat. L'única solució del sistema ve donada per $x_1 = 0$, $x_2 = a_1$, $x_3 = a_2$, $\ldots$, $x_n = a_{n-1}$ i $x_{n+1} = a_n$.

4.4. (*) Una empresa ofereix tres productes diferents, amb índexs de producció respectius P_1, P_2, P_3 i les demandes D_1, D_2, D_3 dels esmentats productes vénen donades en funció de la producció per les relacions:

$$\begin{array}{rcl} D_1 & = & 3P_1 - P_3 - 6 \\ D_2 & = & 3P_1 + P_2 - 2P_3 + 11 \\ D_3 & = & 2P_1 + P_2 - 3P_3 - 6 \end{array}$$

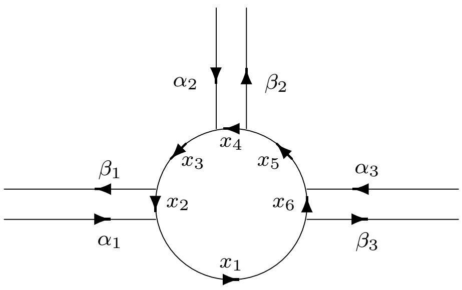
Determineu la quantitat de productes que s'han d'oferir per a que hi hagi equilibri de mercat.

Solució: Hi ha equilibri quan $P_1 = D_1$, $P_2 = D_2$ i $P_3 = D_3$. Resolent el sistema queda $P_1 = 23$, $P_2 = 120$ i $P_3 = 40$.

4.5. (*) Tenim tres productes, P_1 amb 50% de Fe, un 30% de Zn i un 20% de Cu; P_2 amb un 40% de Fe, un 30% de Zn i un 30% de Cu; P_3 amb un 30% de Fe i un 70% de Zn. Per a obtenir un producte amb un 40% de Fe, un 35% de Zn i un 25% de Cu, en quina proporció hem de barrejar P_1, P_2 i P_3?

Solució: Las proporciones són $12'5\%$, 75% i $12'5\%$, respectivament.

4.6. (*) Considereu una rotonda com la de la figura , on $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ indiquen els fluxos entrants, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ els sortints i $(x_1, \ldots, x_6)$ els interns. Es pretén estudiar els fluxos x_i, suposant coneguts els α_j, β_j.



(a) Raoneu empíricament que:

(i) Cal suposar $\Sigma\alpha_j = \Sigma\beta_j$.

(ii) Aleshores, ha d'haver una distribució factible de fluxos interns, amb $x_i > 0$.

(iii) De fet, aquesta distribució no serà única.

(b) Justifiqueu que la relació buscada ve donada pel sistema d'equacions

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\beta_1 \\ \alpha_2 \\ -\beta_2 \\ \alpha_3 \\ -\beta_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Demostreu que:

(i') El sistema és compatible si, i només si, $\Sigma\alpha_j = \Sigma\beta_j$.

(ii') Aleshores el sistema és indeterminat.

(iii') En particular, admet solucions amb $x_i > 0$.

(d) En particular, considerem

$$\alpha_1 = 90\,, \quad \alpha_2 = 130\,, \quad \alpha_3 = 80\,, \quad \beta_1 = 50\,, \quad \beta_2 = 150\,, \quad \beta_3 = 100$$

(1) Estudieu quants i quins fluxos interns cal mesurar per conèixer la resta.

(2) Determineu el flux x_5 mínim.

(3) Estudieu si en algún punt de la rotonda el tràfic pot ser 0.

Solució:

(b) En cada confluència, el nombre de vehicles que hi arriben ha de ser igual al dels que se'n van:

$$x_1 = x_2 + \beta_3, \quad x_2 + \alpha_3 = x_3\,, \ldots\,, \; x_6 + \alpha_1 = x_1\,.$$

(d) (1) Només una, que pot ser qualsevol.

(2) $x_5 > 150$.

(3) x_4.

4.7. (*) (La dieta de Cambridge) La taula següent recull el contingut (grs per 100) en 3 nutrients bàsics (proteïnes, carbohidrats, greixos) de tres aliments

	Llet desnatada	Farina de soja	Serum
Proteïnes	36	51	13
Carbohidrats	52	34	75
Greixos	0	7	11

Determineu quina quantitat de cada aliment cal ingerir per obtenir les aportacions diàries de nutrients bàsics que recomana la dieta de Cambridge: 33 gr de proteïnes, 45 gr de carbohidrats i 3 gr de greixos.

4.8. (*) Alka-setzer conté bicarbonat de sodi i àcid cítric, que al dissoldre's en aigua produeixen citrat de sodi, aigua i diòxid de carboni: $\texttt{Na HCO}_3\texttt{+H}_3\texttt{C}_6\texttt{H}_5\texttt{O}_7 \longrightarrow \texttt{Na}_3\texttt{C}_6\texttt{H}_5\texttt{O}_7\texttt{+H}_2\texttt{O+CO}_2$.
Determineu quantes molècules de cada component són necessàries per produir-ne 100 de citrat de sodi, i aleshores quantes se'n produiran d'aigua i de diòxid de carboni.

Solució: Si escrivim x_1, x_2 el nombre de molècules dels components inicials, respectivament, i que x_3, x_4 el de subproductes, ha de ser:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 100 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

on els vectors columna indiquen la composició atòmica (`Na, C, H, O`) de una molècula de cada substància. Resulta doncs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \\ 500 \\ 700 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 1 & 6 & 0 & -1 & 600 \\ 1 & 8 & -2 & 0 & 500 \\ 3 & 7 & -1 & -2 & 700 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 500 \\ 1 & 8 & -2 & 0 & 500 \\ 3 & 7 & -1 & -2 & 700 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ -1 & 18 & 0 & 0 & 1500 \\ 1 & 8 & -2 & 0 & 500 \\ 3 & 7 & -1 & -2 & 700 \end{array}\right).$$

Per tant, $x_1 = 300$, $x_2 = -(1500 - 5400) = 3900$, etc.

4.9. Sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $Ax = b$ un sistema compatible i determinat . Què es pot afirmar del sistema $A^8 x = b$?

Solució: El sistema $A^8 x = b$ és compatible i determinat, ja que $\det A^8 = (\det A)^8 \neq 0$.

4.10. Utilitzant la regla de Cramer, trobeu la solució dels sistemes següents:

$$\text{(a)} \quad \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)} \quad \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{c)} \quad \left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_5 &= 1 \\ x_3 + x_6 &= 0 \\ x_4 - x_5 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solució:

(a) Sistema compatible determinat: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

(b) Sistema compatible indeterminat: $x_1 = x_3$, $x_2 = 1 - 2x_3$ y x_3 queda lliure.

(c) Sistema compatible indeterminat: $x_1 = 1 + x_2 + x_5$, $x_3 = -x_6$, $x_4 = 1 + x_5$ i x_2, x_5, x_6 queden lliures.

(4B) Inversió de matrius.

4.11. Determineu la inversa de les matrius

(a) $A = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

(b) $C = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$. d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solució:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 17 \\ 4 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Si $a \neq 1$, aleshores $B^{-1} = \dfrac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Si $a = 1$, aleshores la matriu B no és invertible.

(c) Si $abc \neq 0$, aleshores $C^{-1} = \dfrac{1}{2abc}\begin{pmatrix} -c^2 & bc & ac \\ bc & -b^2 & ab \\ ac & ab & -a^2 \end{pmatrix}$.
Si $abc = 0$, aleshores la matriu C no és invertible.

(d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.12. (a) Determineu la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) En general, sigui $A = (a_{ij}) \in M_4(\mathbb{R})$ invertible tal que $a_{ij} = 0$ si $i + j$ és parell, i $a_{ij} \neq 0$ si $i + j$ és senar. És també la inversa una matriu d'aquest tipus?

Solució:

(a) $A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 44 & 0 & -77 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -11 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(b) Sí.

4.13. Utilitzant determinants, estudieu el rang de les següents matrius, i trobeu la seva inversa, en cas de ser invertibles

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució: La matriu A té rang màxim i $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriu B no és invertible, ja que $\text{rang}(B) = 3$.

(4C) Sistemes matricials.

4.21. Determineu la matriu X tal que $AX = B$, essent

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall\, \alpha \in R$.

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Solució:

(a) Sistema compatible determinat, essent la seva solució $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Sistema incompatible.

(c) Sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat, essent les seves solucions

$$X = \begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 1-\frac{5}{2}a & 1-\frac{5}{2}b \\ -\frac{3}{2}a & -\frac{3}{2}b \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(d) Si $\alpha \neq 1$ i $\alpha \neq -2$, el sistema és compatible determinat, essent la seva solució

$$X = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \begin{pmatrix} \alpha-1 & -2 \\ \alpha-1 & 2(\alpha+1) \\ \alpha-1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha = 1$ o $\alpha = -2$, el sistema és incompatible.

(e) Sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat, essent les seves solucions

$$X = \begin{pmatrix} 1-a & 1-b \\ 1-a & 2-b \\ 1-a & 1-b \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

4.22. Determineu X tal que $XA = B$ essent

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Solució:

(a) Sistema compatible determinat, essent la seva solució $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) Sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat, essent les seves solucions

$$X = \begin{pmatrix} 1-2a & a-1 & a \\ -1-2b & 2+b & b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(c) Sistema incompatible.

(d) Sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat, essent les seves solucions

$$X = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} - \frac{1}{4} & -\frac{3}{2}a + \frac{7}{4} & a \\ \frac{b}{2} + \frac{5}{4} & -\frac{3}{2}b - \frac{3}{4} & b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

4.23. Discutiu segons els valors de α la solució del sistema $XA = B$, essent

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució: Si $\alpha = 1$, el sistema és compatible indeterminat amb 4 graus de llibertat, essent les seves solucions

$$X = \begin{pmatrix} a & b & 1-a-b \\ c & d & 1-c-d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha = -2$, el sistema és incompatible.
Si $\alpha \neq 1$ i $\alpha \neq -2$, el sistema és compatible determinat, essent la seva solució

$$X = \frac{1}{\alpha+2} \begin{pmatrix} -(\alpha+1) & 1 & (\alpha+1)^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.24. Resoleu en $M_2(\mathbb{R})$ el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{r} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{array}\right\}$$

essent

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
$D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Solució:

(a) Compatible determinat, amb $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -17 \\ -37 & 14 \end{pmatrix}$ i $Y = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Compatible determinat, amb $X = \begin{pmatrix} 28 & 5 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$ i $Y = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.25. Siguin $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 2 & b & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 2 \\ -2 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Per a quins valors de $a, b \in \mathbb{R}$ els sistemes d'equacions $AX = B$, $XC = D$ tenen una solució comuna? Trobeu-la per a aquests valors.

Solució: $a = 0$, $b = 1$ i $X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Espais vectorials. Bases. Canvis de coordenades

(5A-B) Espais vectorials. Bases

5.1. En $E = \mathbb{R}^2$, considerem els vectors: $e_1 = (1,0)\,,\ e_2 = (0,1)\,,\ u_1 = (1,1)\,,\ u_2 = (1,-1)$.

(a) Calculeu les coordenades d'aquests vectors en les bases: $B_1 = (e_1, e_2)\,,\ B_2 = (e_2, e_1)\,,$ $B_3 = (u_1, u_2)$.

(b) Idem per a un vector genèric $v = (\alpha, \beta)$.

Solució:

	B_1	B_2	B_3
e_1	$(1,\ 0)$	$(0,\ 1)$	$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$
e_2	$(0,\ 1)$	$(1,\ 0)$	$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$
u_1	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 0)$
u_2	$(1,\ -1)$	$(-1,\ 1)$	$(0,\ 1)$
v	$(\alpha,\ \beta)$	$(\beta,\ \alpha)$	$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

5.2. En $\mathbb{R}^3$, considerem les bases:

$$\begin{aligned} B_1 &= (e_1,\, e_2,\, e_3); \quad e_1 = (1,\,0,\,0),\ e_2 = (0,\,1,\,0),\ e_3 = (0,\,0,\,1) \\ B_2 &= (u_1,\, u_2,\, u_3); \quad u_1 = (0,\,1,\,1),\ u_2 = (1,\,0,\,1),\ u_3 = (1,\,1,\,0) \end{aligned}$$

(a) Calculeu les coordenades en cadascuna del vector $v = (1,\,2,\,3)$.

(b) Idem del vector $w = (\alpha,\,\beta,\,\gamma)$.

Solució:

	B_1	B_2
v	$(1,\ 2,\ 3)$	$(2,\ 1,\ 0)$
w	$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$	$\left(\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2},\ \frac{\alpha-\beta+\gamma}{2},\ \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)$

5.3. En $E = M_2(\mathbb{R})$, considerem les bases:

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ B_2 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ B_3 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

(a) Calculeu les coordenades en cadascuna de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Idem de $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Solució:

	B_1	B_2	B_3
A	$(1,\,2,\,3,\,4)$	$(-8,\,2,\,3,\,4)$	$(\frac{5}{2},\,\frac{5}{2},\,-\frac{1}{2},\,-1)$
A'	$(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta)$	$(\alpha-\beta-\gamma-\delta,\,\beta,\,\gamma,\,\delta)$	$\left(\frac{\alpha+\delta}{2},\,\frac{\beta+\delta}{2},\,\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{4},\,\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{4}\right)$

5.4. Considerem $E = \mathbb{R}_2[t]$

(a) Calculeu les coordenades de $1 + t + t^2$ en la base $(1,\, t-1,\, (t-1)^2)$.

(b) En general, demostreu que les coordenades de $P(t) \in E$ en la base $(1,\, t-a,\, (t-a)^2)$ són: $P(a),\ \ P'(a),\ \ P''(a)/2!$.

Solució:

(a) $1 + t + t^2 = \lambda + \mu(t-1) + \eta(t-1)^2 = (\lambda - \mu + \eta) + t(\mu - 2\eta) + t^2\eta \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow\ \eta = 1,\ \ \mu - 2\eta = 1,\ \ \lambda - \mu + \eta = 1 \\ &\Longrightarrow \eta = 1,\ \ \mu = 3,\ \ \lambda = 3 \end{aligned}$$

(b) $P(t) = \lambda + \mu(t-a) + \eta(t-a)^2 \quad \Longrightarrow \quad P(a) = \lambda,\ \ P'(a) = \mu,\ \ P''(a) = 2\eta.$

5.5. Considereu $E = \mathbb{R}_2[t]$

(a) Calculeu les coordenades del polinomi $1+t+t^2$ en la base $(t(t-1),\, t(t-2),\, (t-1)(t-2))$.

(b) En general, demostreu que les coordenades de $P(t) \in E$ en la base $((t-\alpha)(t-\beta),\, (t-\alpha)(t-\gamma),\, (t-\beta)(t-\gamma))$ són:

$$\frac{P(\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},\ \frac{P(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},\ \frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\,.$$

Solució:

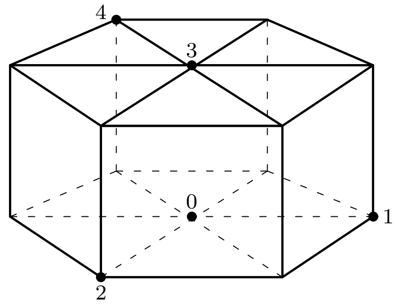
(a) $1 + t + t^2 = \lambda t(t-1) + \mu t(t-2) + \eta(t-1)(t-2)$

$$\begin{aligned} t = 0 &\Longrightarrow 1 = 2\eta \Longrightarrow \eta = 1/2 \\ t = 1 &\Longrightarrow 3 = -\mu \Longrightarrow \mu = -3 \\ t = 2 &\Longrightarrow 7 = 2\lambda \Longrightarrow \lambda = 7/2 \end{aligned}$$

(b) $P(t) = \lambda(t-\alpha)(t-\beta) + \mu(t-\alpha)(t-\gamma) + \eta(t-\beta)(t-\gamma) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow P(\alpha) = \eta(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma),\ P(\beta) = \cdots$$

5.6. (*) La cel·la bàsica dels cristalls de titani té l'estructura hexagonal de la figura



on el diàmetre de la base és $6\ \mathring{A}$ i l'alçària $4'8\ \mathring{A}$. Sovint es prenen com referència $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ els àtoms situats en els vèrtex 1, 2 i 3, amb l'origen de coordenades al 0.

(a) Quines són les coordenades dels altres àtoms de la cel·la bàsica en aquesta referència?

(b) Calculeu les coordenades de 1, 2 i 3 en la referència ordinària de $\mathbb{R}^3$.

(c) En les al·leacions, els àtoms addicionals poden situar-se en llocs "octaèdrics" o "tetraèdrics", com ara els $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ i $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ respectivament. Situeu-los sobre la figura i calculeu la seva distància al 0.

Solució:

(a) $(-1,\, -1,\, 1)$ el 4, ...

(b) $(3,\, 0,\, 0)$, $(-1'5,\, 2'6,\, 0)$, $(0,\, 0,\, 4'8)$

(c) $1'53\,\mathring{A}$, $2'19\,\mathring{A}$.

5.7. (*) Tres productes són fabricats en les factories F_1, F_2, i F_3, amb la següent producció diària:

$$P_1 = (30,\, 30,\, 40) \qquad P_2 = (50,\, 30,\, 20) \qquad P_3 = (10,\, 30,\, 60)\,.$$

Per facilitar la gestió de stocks, cada factoria serveix en les mateixes proporcions en què fabrica. Suposeu que un client presenta periòdicament una comanda $C = (170,\, 150,\, 180)$:

(a) Verifiqueu que podem servir-la des de les factories F_2 i F_3. Calculeu el termini de lliurament.

(b) En cas que F_3 sigui fora de servei, estudieu si podrem servir-lo des de les altres. Calculeu quin seria, aleshores, el termini de lliurament.

(c) Suposant totes les factories disponibles, estudieu com podríem minimitzar el termini de lliurament, i determineu quin seria.

Solució:

(a) $C = 3P_2 + 2P_3$; 3 dies.

(b) $C = 4P_1 + P_2$; 4 dies.

(c) $C = 2P_1 + 2P_2 + P_3$; 2 dies.

5.8. (*) Una fàbrica produeix dos productes P_1, P_2 a partir de dues matèries primeres M_1, M_2. El consum unitari d'aquestes matèries per a cada producte és: $p_1 = (0'3,\ 0'7)$, $p_2 = (0'6, 0'4)$.
Se serveixen dos clients, les comandes ordinàries dels quals tenen la composició següent: $c_1 = (100, 300)$, $c_2 = (400, 200)$.

(a) Si el nombre mensual de comandes és C_1 i C_2 respectivament, i el preu unitari de les matrius primeres és m_1, m_2, justifiqueu que el cost de les matèries primeres consumides en un mes és:

$$(m_1 \ \ m_2)\begin{pmatrix} 0'3 & 0'6 \\ 0'7 & 0'4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 & 400 \\ 300 & 200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Esbrineu com varia aquest cost en cadascun dels supòsits següents:

(i) m_1 augmenta un 10%.

(ii) C_2 augmenta un 10%.

(iii) En la producció de P_1 estalvien un 10% de M_2.

Solució:

(b) (i) El cost total augmenta en $21C_1 + 24C_2$.

(ii) El cost total augmenta en $24m_1 + 36m_2$.

(iii) El cost disminueix en $7m_2C_1 + 28m_2C_2$.

(5C) Rang d'una família de vectors

5.11. En $E = \mathbb{R}^4$, considerem la família de vectors: $v_1 = (1, -1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (2, -2, 2, -2)$, $v_4 = (3, 3, 7, 7)$.

(a) Determineu una subfamília linealment independent maximal.

(b) Amplieu-la fins una base de E, afegint vectors de la base ordinària de E.

Solució:
$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -21 & -6 & 15 \end{array}\right).$$

(a) $(v_1,\ v_2)$. També $(v_1,\ v_4)$. Però no $(v_1,\ v_3)$, ni $(v_2,\ v_4)$.

(b) $(v_1,\ v_2,\ e_1,\ e_2)$. També $(v_1,\ v_2,\ e_1,\ e_3)$, ...

5.12. En $E = \mathbb{R}^3$, considerem els vectors: $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, \alpha, 1)$, $v_3 = (1, 1-\alpha, \alpha)$, $v_4 = (\alpha, 1, 1)$.

(a) Discutiu per a quins valors de $\alpha \in \mathbb{R}$ generen E.

(b) En cada cas, seleccioneu una subfamília que formi base.

Solució: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1-\alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha-1 & 1-\alpha \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha- & 1-\alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha-1 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & (1-\alpha)^2 \end{pmatrix}$$

(a) Generen per a tot valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ (la darrera fila seria nul.la per a $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$, la qual cosa és incompatible.)

(b) Si $\alpha = 0$: base (v_1, v_2, v_4), però no pas (v_1, v_2, v_3).
Si $\alpha = 1$: base (v_1, v_2, v_3), però no pas (v_1, v_2, v_4).
Si $\alpha \neq 0, 1$: bases (v_1, v_2, v_3), (v_1, v_2, v_4), ...

Alerta!: En el segon pas hem permutat la 2a i 3a fila, ja que en cas contrari l'element pivot $a_{22} = \alpha$ podria ser 0.

5.13. Sigui $(e_1, \ldots, e_n)$ una base de l'espai vectorial E i $(u_1, \ldots, u_n)$ la família definida per $u_i = e_{i+1} - e_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $u_n = e_n$.

(a) Proveu que $(u_1, \ldots, u_n)$ és base de E.

(b) Expresseu el vector $e_1 + \cdots + e_n$ en la base $(u_1, \ldots, u_n)$.

Solució:

(a) $\text{rang Mat}_{e_i}(u_1, \ldots, u_n) = \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix} = n.$

(b) $e_1 + \cdots + e_n = -u_1 - 2u_2 - 3u_3 - \cdots - (n-1)u_{n-1} + nu_n$.

5.14. Estudieu si tot polinomi de grau 2 pot expressar-se com combinació lineal de quadrats de la forma $(x-\alpha)^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ídem per a grau n.

5.15. Sigui $\mathbb{R}_4[x]$ l'espai vectorial dels polinomis en la variable x, amb coeficients a $\mathbb{R}$ i de grau menor o igual que 4. Siguin a_0, a_1, a_2, a_3 i a_4 cinc nombres de $\mathbb{R}$ diferents dos a dos. Demostreu que els polinomis $(x - a_i)^4$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ formen una base de $\mathbb{R}_4[x]$.

Solució: Recordant les fórmules del binomi de Newton, veiem que el determinant de la matriu formada pels coeficients dels polinomis $p_i(x) = (x - a_i)^4$ casi té la forma de un determinant de Van der Monde.

(5D) Canvis de coordenades

5.21. En $E = \mathbb{R}^n$, considerem $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la base natural i $\overline{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ la definida per:

$$\begin{aligned} u_1 &= (0,\, 1,\, 1,\, \ldots,\, 1,\, 1) \\ u_2 &= (1,\, 0,\, 1,\, \ldots,\, 1,\, 1) \\ \ldots \\ u_n &= (1,\, 1,\, 1,\, \ldots,\, 1,\, 0) \end{aligned}$$

(a) Essent $x \in E$ i $(x_1, \ldots, x_n)$ les seves coordenades naturals, demostren que les seves coordenades $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ en la base $\overline{B}$ venen donades per:

$$\overline{x}_i = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n-1} - x_i\,, \quad i \leq i \leq u\,.$$

(b) Calculeu la matriu de canvi de base $S = \mathrm{mat}_B \overline{B}$, i verifiqueu que

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Solució:

(a) $x = \overline{x}_1 u_1 + \cdots + \overline{x}_n$ si, i només si,

$$\begin{cases} x_1 = \overline{x}_2 + \cdots + \overline{x}_n = \sum \overline{x}_i - \overline{x}_1 \\ x_2 = \overline{x}_1 + \overline{x}_3 + \cdots + \overline{x}_n = \sum \overline{x}_i - \overline{x}_2 \\ \vdots \\ x_n = \overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_{n-1} = \sum \overline{x}_i - \overline{x}_n \end{cases}$$

Per tant, $x_1 + \cdots + x_n = (n-1)(\overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_n)$. Finalment,

$$\overline{x}_i = \sum \overline{x}_i - x_i = \frac{\sum x_i}{n-1} - x_i\,.$$

(b) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

5.22. En $E = \mathbb{R}^3$, designem per (x, y, z) les coordenades d'un vector en la base natural (e_1, e_2, e_3) i per $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ les seves coordenades en una nova base (u_1, u_2, u_3). Se sap que les coordenades respectives de tres vecctors v_1, v_2, v_3 són:

	$(x,\, y,\, z)$	$(\overline{x},\, \overline{y},\, \overline{z})$
v_1	$(3,\, 3,\, -1)$	$(1,\, 1,\, 2)$
v_2	$(2,\, 1,\, 1)$	$(2,\, 0,\, 1)$
v_3	$(-1,\, -1,\, 1)$	$(1,\, -1,\, 0)$

(a) Calculeu quines són les coordenades de u_1 en la base natural

(b) Calculeu les matrius de canvi de base S tal que:

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solució:

(a) $u_1 = \dfrac{v_1 + v_3 - 2v_2}{-2}$. Per tant, les seves coordenades naturals són:

$$\frac{(3,3,1) + (-1,-1,1) - 2(2,1,1)}{-2} = (1,0,1)\,.$$

(b) Les coordenades naturals de u_1 calculades a (1) formen la primera columna de S. Anàlogament es calcularien la segona i la tercera.
També es pot observar directament que:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

5.23. En $E = \mathbb{R}^3$, designem per (x, y, z) les coordenades naturals i per $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ les noves en la base (u_1, u_2, u_3) donada per:

$$S = \mathrm{mat}_{e_i}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Expresseu en les coordenades $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} -x + 2y + 2z &= 1 \\ x - y - z &= 2 \\ x + 2y + z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

(b) En general, expresseu en les coordenades $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$.

Solució:

(a) Com que $x = \overline{x} + 2\overline{y}$, $y = \overline{y} + \overline{z}$, $z = \overline{x} - \overline{z}$, substituint resulta

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= 1 \\ \overline{y} &= 2 \\ 2\overline{x} + 4\overline{y} + \overline{z} &= -1 \end{aligned}\right\}$$

(b) $AS \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = b$.

5.24. (*)

(a) Considerem el sistema dinàmic $\dot{x}(t) = Ax(t) + b$. En unes noves coordenades $\bar{x} = S^{-1}x$ serà: $\dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}\,\overline{x}(t) + \overline{b}$. Determineu les matrius $\overline{A}$, $\overline{b}$ en termes de S i les inicials A, b.

(b) Ídem per la terna de matrius $(C,\ A,\ B)$ que defineix un sistema de control: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $\quad y(t) = Cx(t)$.

(c) Deduïu del resultat de (b) que la matriu de transferència $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ és invariant per canvis de base. És a dir, $C(sI - A)^{-1}B = \overline{C}(sI - \overline{A})^{-1}\overline{B}$.

Solució:

(a) $\overline{x} = S^{-1}x \Rightarrow \dot{\overline{x}} = S^{-1}\dot{x} = S^{-1}(Ax + b) = S^{-1}Ax + S^{-1}b = S^{-1}AS\overline{x} + S^{-1}b$. Per tant, $\overline{A} = S^{-1}AS$, $\overline{b} = S^{-1}b$.

(b) Com abans: $\dot{\overline{x}} = S^{-1}AS\overline{x} + S^{-1}Bu$. D'altra banda: $y = Cx = CS\overline{x}$. Per tant, $\overline{A} = S^{-1}AS$, $\overline{B} = S^{-1}B$, $\overline{C} = CS$.

(c) $\overline{C}(sI - \overline{A})^{-1}\overline{B} = CS(sI - S^{-1}AS)^{-1}S^{-1}B = CS(S^{-1}(sI - A)S)^{-1}S^{-1}B =$
$= CSS^{-1}(sI - A)^{-1}(S^{-1})^{-1}S^{-1}B = C(sI - A)^{-1}B$.

5.25. En $\mathbb{R}^3$ es considera el canvi lineal de coordenades donat per:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= -x + 2y + 2z \\ \overline{y} &= x - y - z \\ \overline{z} &= -x + 2y + z \end{aligned}$$

on (x, y, z) indiquen les coordenades naturals, i $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ les noves, en una certa base (u_1, u_2, u_3)

(a) Representeu gràficament els seus eixos coordenats i l'escala sobre cadascun.

(b) Calculeu l'equació en les noves coordenades de la quàdrica:

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3xy - 3xz + 3yz = 0\,.$$

Representeu-la gràficament.

Solució:

(a) Les coordenades naturals de u_1 resultarien de resoldre

$$\begin{aligned} 1 &= -x + 2y + 2z \\ 0 &= x - y - z \\ 0 &= -x + 2y + z \end{aligned}$$

i anàlogament per u_2, u_3. Més directament, com que:

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Tenim:

$$S = \mathrm{mat}_{e_i}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(b) De $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}$, resulta: $x = \overline{x} + 2\overline{y}$, etc. Substituint i operant s'obté: $\overline{x}\,\overline{y} = 0$.

5.26. En $E = \mathbb{R}_2[t]$ considerem les bases:

$$\begin{array}{ll} B: & 1,\ t,\ t^2 \\ B': & 1,\ t-1,\ (t-1)^2 \\ B'': & t(t-1),\ t(t-2),\ (t-1)(t-2) \end{array}$$

(a) Calculeu les matrius de coordenades X, X', X'' del polinomi $1 + t + t^2$ en les tres bases, respectivament.

(b) Calculeu les matrius del canvi de base $S' = \mathrm{mat}_B B'$, $S'' = \mathrm{mat}_B B''$ i verifiqueu que:

$$X' = (S')^{-1} X \,, \qquad X'' = (S'')^{-1} X \,.$$

(c) Essent $T = \mathrm{mat}_{B'} B''$, justifiqueu que $T = (S')^{-1} S''$ i verifiqueu que $X'' = T^{-1} X'$.

Solució:

(a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad X' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad X'' = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

(b) $S' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad S'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $T = \mathrm{mat}_{B'} B'' = \mathrm{mat}_{B'} B \mathrm{mat}_B B'' = (S')^{-1} S''$

$$X'' = (S'')^{-1} X = (S'')^{-1} S' X' = ((S')^{-1} S'')^{-1} X' = T^{-1} X' \,.$$

6. Subespais vectorials. Subespais definits per equacions. Subespais definits per generadors

(6A) Subespais vectorials.

6.1. Estudieu si F, G són, o no, subespais vectorials de E, essent:

(a)	$E = \mathbb{R}^4$	$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0\}$
		$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 1\}$
(b)	$E = \mathbb{R}_2[x]$	$F = \{P(x) \in E \mid 1 \text{ és arrel de } P(x)\}$
		$G = \{P(x) \in E \mid P(1) = P(0)\}$
(c)	$E = M_2(\mathbb{R})$	$F = \{A \in E \mid A = A^t\}$
		$G = \{A \in E \mid \det A = 0\}$
(d)	$E = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$	$F = \{f \in E \mid f(0) = f(1)\}$
		$G = \{f \in E \mid f(-x) = 5 - f(x)\}$

$F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ indica l'espai vectorial de les funcions reals de variable real, amb la suma i producte per un escalar habituals).

Solució:

(a) F Sí. G No.
(b) F Sí. G Sí.
(c) F Sí. G No.
(d) F Sí. G No.

6.2. (a) Demostreu que el conjunt F de les successions numèriques $u = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ provist de les lleis de composició $+$ i $\cdot$, definides mitjançant $u, v \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda \cdot u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, és un espai vectorial.

(b) Proveu que el conjunt G de les successions de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definides per la relació de recurrència $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $n \in \mathbb{N}$, és un subespai vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(c) Què es pot dir de les dimensions de F i G?

Solució:

(a) És una demostració.
(b) És una demostració.
(c) $\dim F = \infty$ i $\dim G = 2$. Una base de G és $((1,0,1,1,2,3,\dots),(0,1,1,2,3,5,\dots))$.

6.3. (*) Es consideren els senyals lineals a trossos $[P^-, P^+]$ definits per

$$[P^-, P^+](t) = P^-(t), \quad \text{si} \quad t < 0$$

$$[P^-, P^+](t) = P^+(t), \quad \text{si} \quad t > 0$$

on $P^-(t)$, $P^+(t)$ són polinomis de grau 1 en $\mathbb{R}$.

(a) Verifiqueu que el conjunt E d'aquests senyals forma un espai vectorial de dimensió 4.

(b) Sigui $F \subset E$ el subconjunt dels senyals continus, és a dir: $P^-(0) = P^+(0)$. Verifiqueu que F és un subespai vectorial, i calculeu-ne la dimensió.

(c) Verifiqueu que una base de F és: $1, \quad t, \quad |t|$.

(d) Calculeu les coordenades del senyal rampa $[0, t]$ en la base anterior.

Solució:

(a) $E = \{[a^- t + b^-,\ a^+ t + b^+] :\ a^-, b^-, a^+, b^+ \in \mathbb{R}\}$

(b) $F = \{[a^- t + b^-,\ a^+ t + b^+] :\ b^- = b^+\};\ \dim F = 3$

(c) $\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1/2 \\ \lambda_3 = 1/2 \end{matrix}$

(d') Alternativament: $\lambda_1 + \lambda_2 t + \lambda_3 |t| = [0, t]$

$$\begin{aligned} t = -1 &: \quad \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ t = 0 &: \quad \lambda_1 = 0 \\ t = 1 &: \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

(6B) Subespais definits per equacions.

6.11. Trobeu una base dels següents subespais:

(a) $U = \{(x, y, z, t) \mid y + z + t = 0\}$, $V = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0, z = 2t\}$.

(b) $F = \{P(t) \in \mathbb{R}_3[t] \mid P(1) = 0, P'(1) = 0\}$ subespai de $\mathbb{R}_3[t]$.

(c) $G = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid trA = 0\}$ subespai de $M_2(\mathbb{R})$ ($trA =$ traça de la matriu A).

(d) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3t = y\}$
$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z - t = 0\}$

(e) $H = \{P(t) \in \mathbb{R}_3[t] \mid P(0) = P(1) = P'(0)\}$

(f) $I = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$

Solució:

(a) Una base de U és $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$.
Una base de V és $((1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1))$.

(b) Una base de F és $((t - 1)^2, (t - 1)^3) = (t^2 - 2t + 1, t^3 - 3t^2 + 3t - 1)$.

(c) Una base de G és $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

(d) Una base de F és $((1,1,0,0),(0,3,0,1),(0,0,1,0))$.
Una base de G és $((1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1))$.

(e) Una base de H és (t^2-t-1, t^3-t-1).

(f) Una base de I és $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

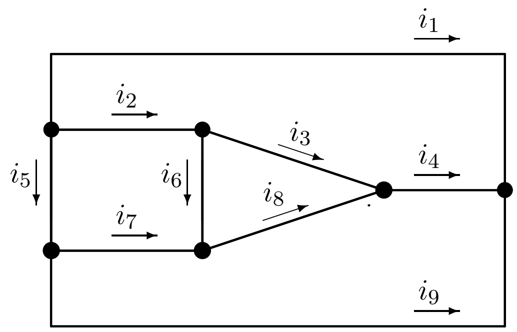
6.12. Estudieu si són subespais vectorials de l'espai vectorial de polinomis de grau menor o igual que 2, i en cas afirmatiu determineu-ne una base, els conjunts F i G definits respectivament per:

(a) $P(t) = P(0) + P(1)t + P(2)t^2$. (b) $P'(2) = P(1)$.

Solució:

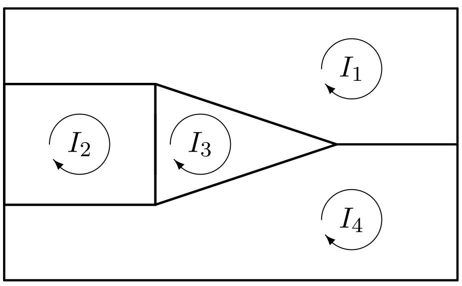
(a) Sí. Una base de F és (t^2-t-1). (b) Sí. Una base de G és (t^2+3, t).

6.13. (*) Considereu la xarxa



D'entre el conjunt E de distribucions arbitràries de corrents, interessa el subconjunt $F \subset E$ dels que verifiquen la 1a llei de Kirckhoff: en cada nus la suma de corrents entrants ha de ser igual a la dels sortints.

A la pràctica no s'empren els corrents assenyalats sinó els "corrents de malla":



Per a justificar aquest ús:

(a) Raoneu que E és un espai vectorial, de dimensió 9, i demostreu que F n'és un subespai, de dimensió 4.

(b) Determineu una base de F de manera que (I_1, I_2, I_3, I_4) en siguin efectivament les coordenades.

(c) Deduïu igualment que una de les equacions de Kirckhoff és redundant, és a dir, que si es verifica en 5 nusos, aleshores ho fa també en el sisè.

Solució:

6.14. (**opt.**) Sigui $\mathbb{R}_3[t]$ el conjunt de polinomis a una indeterminada i de grau ≤ 3.

(a) Proveu que els polinomis $P(t) \in \mathbb{R}_3[t]$ que verifiquen $P(1) = 0$, $P'(1) = 0$ on P' és el polinomi derivada de P, formen un subespai vectorial F de $\mathbb{R}_3[t]$. Doneu la seva dimensió i una base.

(b) Els polinomis $(t-1)^2$ i $t(t-1)^2$, són linealment independents?

(c) Trobeu dos polinomis que completin la base de F i formin una base de $\mathbb{R}_3[t]$. Determineu un subespai suplementari G de F en $\mathbb{R}_3[t]$.

Solució:

(a) $\dim F = 2$. Una base de F és $((t-1)^2, (t-1)^3)$.

(b) Sí.

(c) $G = \mathbb{R}_1[t] = [1, t] = [1, t-1]$.

(6C) Subespais definits per generadors.

6.21. Per a cadascun dels conjunts següents, estudieu la dependència o independència lineal i trobeu una base dels subespais que generen. Per als dels apartats (a) i (b), trobeu equacions que el defineixin, si és el cas.

(a) En $\mathbb{R}^4$ es consideren els següents conjunts de vectors

(i) $\{(1,2,2,1), (5,6,6,5), (-1,-3,4,0), (0,4,-3,-1)\}$

(ii) $\{(1,2,5,-1), (3,6,5,-6), (2,4,0,-2)\}$

(iii) $\{(1,0,2,1), (2,1,3,4), (3,1,5,5), (1,1,1,3), (4,2,6,8)\}$

(iv) $\{(0,0,2,-1), (1,0,3,2), (0,1,1,1), (-1,1,4,-4)\}$

(v) $\{(1,3,5,9), (0,0,1,-1), (3,5,8,7), (3,0,-1,2)\}$

(vi) $\{(1,0,3,1), (0,1,5,3), (3,0,-1,2)\}$

(b) En $\mathbb{R}^3$ es considera el conjunt de vectors

$\{(1,1,1), (a,b,c), (a^2,b^2,c^2)\}$ on a, b, c són nombres reals distints.

(c) En l'espai vectorial de funcions contínues d'una variable a valors reals o complexos es considera el conjunt de vectors

(i) $\{e^{i\pi t}, e^{i\pi(t-1)}, e^{i\pi(t+1)}\}$
(ii) $\{\sin \pi t, \sin 2\pi t\}$

Solució:

(a) Siguin (x, y, z, t) les coordenades en $\mathbb{R}^4$. Aleshores:
  (i) Linealment dependents.
  Una base és $((1,2,2,1),(5,6,6,5),(-1,-3,4,0))$.
  Una possible equació és $\{7x - y + z - 7t = 0\}$.
  (ii) Linealment independents, llavors són una base.
  Una possible equació és $\{2x - y = 0\}$.
  (iii) Linealment dependents.
  Una base és $((1,0,2,1),(2,1,3,4))$.
  Unes possibles equacions són $\{2x - y - z = 0,\ x + 2y - t = 0\}$.
  (iv) Linealment dependents.
  Una base és $((0,0,2,-1),(1,0,3,2),(0,1,1,1))$.
  Una possible equació és $\{7x + 3y - z - 2t = 0\}$.
  (v) Linealment independents, llavors són una base de $\mathbb{R}^4$.
  (vi) Linealment independents, llavors són una base.
  Una possible equació és $\{7x + 25y + z - 10t = 0\}$.

(b) Son linealment independents i una base de $\mathbb{R}^3$.

6.22. Trobeu un sistema d'equacions el conjunt de solucions del qual siguin els subespais:

(a) $U = [(1,-2,0,3),(1,-1,-1,4),(1,0,-2,5)]$, $V = [(1,2,0,1)]$.
(b) $F = [1 + 3x^2]$ subespai de $\mathbb{R}_3[x]$.
(c) $G = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$ subespai de $M_2(\mathbb{R})$.
(d) $U = [(0,0,1,3),(2,5,1,0),(1,1,0,0)]$.
$V = [(0,1,3,3),(0,0,1,1),(0,1,0,-3)]$.
(e) $F = [3x + 8, 3x^2 + 2x]$, subespai de $\mathbb{R}_2[x]$.
(f) $G = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$.

Solució:

(a) $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y + z = 0,\ 5x + y - t = 0\}$.
$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y = 0,\ z = 0,\ x - t = 0\}$.

(b) $F = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : 3a_0 - a_2 = 0,\ a_1 = 0,\ a_3 = 0\}$.

(c) $G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a + d = 0,\ b = 0,\ c = 0\right\}$.

(d) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 3z - t = 0\}$.
$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0\}$.

(e) $F = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] : 9a_0 - 24a_1 + 16a_2 = 0\}$.

(f) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a - 4b + c + d = 0 \right\}$.

6.23. (*) Considereu un paral·lelogram (A, B, C, D) en el pla, centrat a l'origen. Demostreu que, donada una distribució arbitrària de masses $m_1, \ldots, m_s$ en punts $P_1, \ldots, P_s$, sempre és possible ubicar masses adequades m_A, m_B, m_C, m_D en els vèrtexs del paral·lelogram per tal que el centre de masses del conjunt sigui l'origen. Raoneu que, de fet, només cal emprar dos dels quatre vèrtexs en cada cas.

6.24. (**) El repartiment del cost de producció dels productes P_1 i P_2 entre material, ma d'obra, logística i d'altres és

$$v_j = (a_j, b_j, c_j, d_j), \quad a_j + b_j + c_j + d_j = 1$$

per a $j = 1, 2$. Es pretén produir-los en proporcions adequades per tal d'equilibrar les despeses en els tres primers conceptes.

(a) Justifiqueu que això és possible si, i només si,

$$(1, 1, 1) \in [(a_1,\, b_1,\, c_1),\ (a_2\, b_2\, c_2)]\,.$$

(b) Justifiqueu que, aleshores, la proporció de despesa en "altres" ve donada pel valor de α tal que

$$\left(\frac{1-\alpha}{3},\ \frac{1-\alpha}{3},\ \frac{1-\alpha}{3},\ \alpha \right) \in [v_1,\ v_2]\,.$$

(6D) Intersecció i suma de subespais.

6.31. (a) En $\mathbb{R}^4$ considerem els vectors: $(1, 2, 0, 1), (2, 3, 0, 3), (3, 2, 1, 2)$.
Formeu les equacions del subespai vectorial F que generen.

(b) Considerem $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z + t = 0\}$. Determineu una base de G, comprovant prèviament que G és un subespai vectorial.

(c) Doneu les equacions que defineixen els subespais $F \cap G$ i $F + G$, així com una base de cadascun d'ells.

(d) Determineu una base de $\mathbb{R}^4$ adaptada a F i G.

Solució:

(a) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - y - 5z - t = 0\}$.

(b) Una base de G és $((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$.

(c) $F \cap G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - y - 5z - t = 0,\ x - y + z + t = 0\}$. $F + G = \mathbb{R}^4$. Una base de $F \cap G$ és $((1, 2, 0, 1), (3, 4, 1, 0))$.

6.32. (*) En el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \qquad A \in M_n\,, \qquad B \in M_{n\times m}$$

el conjunt d'estats x assolibles des de l'origen (mitjançant controls u adients) és el subespai $F \subset \mathbb{R}^n$ engendrat per les columnes de la matriu de controlabilitat

$$K = (B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{n-1}B)$$

(a) Calculeu $F \subset \mathbb{R}^n$ per a $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Suposeu ara que el segon control és fora de servei i només podem utilitzar u_1. La nova matriu de controlabilitat és la formada per les columnes de K obtinguts a partir de la primera columna de B:

$$K_1 = (b_1 \,\vdots\, Ab_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}b_1)\,.$$

Calculeu el subespai $F_1 \subset \mathbb{R}^3$ d'estats assolibles des de l'origen en aquestes condicions.

(c) Anàlogament, calculeu el subespai $F_2 \subset \mathbb{R}^3$ d'estats assolibles des de l'origen només amb el segon control.

(d) Front l'eventualitat que s'avariï un dels dos controls, determineu quins estats finals queden garantits mitjançant l'altre (tant si és u_1 com u_2).

6.33. En $\mathbb{R}^4$, considerem els subespais $F = \operatorname{Im} A$ (és a dir, F és generat per les columnes de A) i $G = \operatorname{Nuc} B$ (és a dir, $G = \{x : Bx = 0\}$), essent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 7 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu les dimensions de $F \cap G$ i de $F + G$.

(b) Determineu una base de E adaptada als subespais F i G.

Solució:

(a) $\dim F = 2$; $\dim G = 2$; $\dim(F \cap G) = 1$; $\dim(F + G) = 3$.

(b)
$$\underbrace{\rlap{$\overbrace{\phantom{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}}}^{F}$}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}\quad \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}}_{F\cap G}\quad \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}}^{G}}_{F+G}\quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

6.34. (*) La descomposició de Kalman d'un sistema de control

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{aligned}$$

es calcula mitjançant una base adaptada a Im K i Nuc L, essent

$$K = (B\,, \quad AB\,, \quad \dots\,, \quad A^{n-1}B)\,, \qquad L = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

(a) Obtingueu una base de Kalman per a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 0)\,.$$

(b) Idem amb $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solució:

(a) $K = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 & 7/2 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Im $K \cap$ Nuc $L = (1,0,0,0)$

Im $K = [(1,0,0,0),\ (0,1,0,0)]$

Nuc $L = [(1,0,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)]$

Im $K +$ Nuc $L = E$.

(b) $K = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 3 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Im $K \cap$ Nuc $L =$ Im $K = [(1,0,0,0),\ (0,0,1,1)]$

Nuc $L = [(1,0,0,0),\ (0,0,1,1),\ (0,0,0,1)]$

$E = [(0,1,0,0),\ (1,0,0,0),\ (0,0,1,1),\ (0,0,0,1)]$

(6E) Suma directa.

6.41. En l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ es consideren els subconjunts:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} \\ V_2 &= \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

(a) Proveu que V_1, V_2 són subespais vectorials, doneu la seva dimensió i una base de cadascun d'ells.

(b) Proveu que són linealment independents.

(c) Proveu que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$. Doneu la descomposició d'un vector qualsevol de $\mathbb{R}^3$ en suma d'un de V_1 i un de V_2.

Solució:

(a) $\dim V_1 = 2$ i $\dim V_2 = 1$.
Una base de V_1 és $((1,-1,0),(1,0,-1))$.
Una base de V_2 és $((1,2,3))$.

(b) $V_1 \cap V_2 = \{(\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha);\ \alpha + 2\alpha + 3\alpha = 0\} = \{0\}$.

(c) Si $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, la descomposició $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$, es:

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\frac{5x-y-z}{6}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+z}{2}\right), \\ u_2 &= \left(\frac{x+y+z}{6}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{2}\right). \end{aligned}$$

6.42. (**opt.**) En $E = \mathbb{R}_2[t]$ considerem els polinomis $P_1(t) = (t-\alpha)(t-\beta)$, $P_2(t) = (t-\alpha)(t-\gamma)$, $P_3(t) = (t-\beta)(t-\gamma)$, on α, β, γ són nombres reals diferents. Essent F_1, F_2, F_3 els subespais generats respectivament per cadascun d'aquests polinomis:

(a) Caracteritzeu els subespais F_1, $F_1 \cap F_2$, $F_1 + F_2$, $(F_1 + F_2) \cap F_3$ en termes de les arrels dels polinomis que hi pertanyen.

(b) Deduïu que F_1, F_2, F_3 formen suma directa.

(c) Deduïu igualment que P_1, P_2, P_3 formen una base de E.

6.43. (a) En $M_2(\mathbb{R})$ considerem els subespais

$$\begin{aligned} F &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a = d \right\} \\ G &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = 0, a = -d \right\} \end{aligned}$$

Estudieu si són linealment independents. Determineu $F + G$.

(b) Anàlogues qüestions amb

$$\begin{aligned} F &= \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / \, a = b = c;\ d = 0\} \\ G &= \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / \, c + d = 0\} \end{aligned}$$

Solució:

(a) No són linealment independents. $F + G = M_2(\mathbb{R})$.

(b) $F \oplus G = M_2(\mathbb{R})$.

6.44. (**opt.**) Busqueu un complementari de F en E essent:

(a) $E = \mathbb{R}^4$ $\quad F = [(1,2,0,0),(1,0,0,1)]$

(b) $E = \mathbb{R}_3[t]$ $\quad F = [1+t, 1-t^2, 1]$

(c) $E = M_2(\mathbb{R})$ $\quad F = \{A \in E \mid A = -A^t\}$

(d) $E = \mathbb{R}_3[t]$ $\quad F = \{P(t) \in E \mid P(1) = P'(1); P(0) = 0\}$

(e) $E = M_2(\mathbb{R})$ $\quad F = \{A \in E \mid \text{tr } A - \text{tr } A^t = 0\}$

(f) $E = M_2(\mathbb{R})$ $\quad F = \{A \in E \mid \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \right) = 0\}$

Solució: Si notem per G a un complementari de F en E, aleshores

(a) $G = [(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$.

(b) $G = [t^3]$.

(c) $G = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$.

(d) $G = [1, t^2]$.

(e) $G = \{0\}$, ja que $F = E$.

(f) $G = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$.

7. Aplicacions lineals. Matrius d'aplicacions lineals. Operacions amb aplicacions lineals

(7A) Aplicacions lineals.

7.1. Estudieu si són o no lineals les següents aplicacions

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y) = (x+y, x)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y) = (xy, x)$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $f(x,y) = (x, x, x+y)$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = x^2y^2$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y) = (y, 0)$

(f) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $f(x,y,z) = (x+a, by, x+y+z)$

Solució:

(a) Sí.

(b) No.

(c) Sí.

(d) No.

(e) Sí.

(f) f és lineal si i només si $a = 0$.

7.2. (*) Una barreja de dues substàncies evoluciona de forma que la seva composició, mesurada cada hora, varia linealment. Si per a una quantitat total de 63, les composicions per a $t = 0$, $t = 1$ i $t = 2$ són respectivament $42/21$, $36/27$ i $33/30$, assenyaleu quina serà per a $t = 3$.

Solució: $\begin{pmatrix} 33 \\ 30 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 42 \\ 41 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 36 \\ 27 \end{pmatrix}$. Per tant, per a $t = 3$: $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 36 \\ 27 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 33 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 53 \\ 63 \end{pmatrix}$.

7.3. Qüestions sobre linealitat:

(a) Suposem una corda cenyida a una columna de diàmetre 1 m. Si l'allarguem 1 m., quant se separarà de la columna? (se suposa que continua formant una circumferència concèntrica amb la secció de la columna).

Idem si suposem inicialment la corda cenyida a l'equador de la Terra, i l'allarguem igualment 1 m.

(b) Discutiu la coherència de la frase: per a distàncies entre 3 i 4 m., es recomana un TV de 32".

Solució:

(a) Si el diàmetre inicial és D, la llargària de la corda és $L = \pi D$. Després d'allargar-la 1 m., el diàmetre serà: $D' = \dfrac{L+1}{\pi} = D + \dfrac{1}{\pi}$. Per tant, la separació final és aproximadament 16 cm., qualsevol que sigui el diàmetre inicial (!)

(b) Se suposa que es tracta d'optimitzar l'angle de visió: si denotem per θ aquest òptim, la grandària ideal seria $P = 2D\tan\theta$. Com que les mides P disponibles al mercat són ... 26,,32, 37, ..., la recomanació dona a entendre que per a $D = 3$ convindria $P = 29$ (com que no existeix, s'arrodoneix a 26" per a $D < 3$, i a 32" per a $D > 3$) i per a $D = 4$ convindria $P = 34'5$. Cosa absurda ja que $19/3 \neq 34'5/4$. De fet, l'interval de distàncies recomanables per a 32" ha de ser de 60 cm. aproximadament, i no pas de 1 m.

7.4. Determineu els punts fixos dels endomorfismes següents:

(a) En $E = \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+y,\, 2x-y) \\ g(x,y) &= (y,\, 2x-y) \end{aligned}$$

(b) En $E = M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f(A) &= A^t \\ g(A) &= A + A^t \end{aligned}$$

(c) En $E = C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f(\varphi(t)) &= \varphi'(t) \\ g(\varphi(t)) &= \frac{1}{2}\varphi'(t) \end{aligned}$$

7.5. En $\mathbb{R}_2[t]$, estudieu si són lineals les aplicacions definides per:

(a) El gràfic de $f(P(t))$ és simètric del de $P(t)$ respecte a l'eix vertical $t = 0$.

(b) Ídem respecte a la recta vertical $t = 1$.

(c) Ídem respecte a l'origen.

(7B) Matrius d'aplicacions lineals.

7.11. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicació lineal, la matriu de la qual en les bases

$$B_1 = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)) \quad \text{i} \quad B_2 = ((1,1),(1,0)),$$

és $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; es demana:

(a) Trobeu la matriu de f en les bases naturals de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$.

(b) Trobeu la matriu de f referida a les bases

$$B_1' = ((1,0,1),(0,1,0),(1,1,0))\,; \quad B_2' = ((2,1),(1,2))$$

(c) Trobeu la imatge referida a B_2' del vector de coordenades $(1,2,3)$ relatives a la base B_1.

Solució:

(a) La matriu de f en les bases naturals és $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) La matriu de f en les bases $\mathcal{B}_1'$ i $\mathcal{B}_2'$ és $B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{8}{3} & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Las coordenades de la imatge del vector $(1,2,3)_{\mathcal{B}_1}$ són $(16,\ 5)$ en base B_2, i per tant $(9,\ -2)$ en base B_2'.

7.12. Considereu $f \in \mathrm{End}\,(\mathbb{R}^2)$ que en la base $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (1,0)$ té matriu $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculeu, en la base natural (e_1, e_2), la imatge del vector $2e_1 + e_2$.

7.13. (*) Considerem l'intercanvi poblacional centre/suburbis, suposant per simplificar que el nombre total d'habitants és constant, igual a 1.000.000. Denotem per x_1, x_2 respectivament el cens en el centre i en els suburbis, en milers d'habitants.

(a) Si el valor de x_1 als anys 1995, 2000 i 2005 era 600, 400 i 300 respectivament, calculeu la previsió per al 2010, suposant que la transformació lineal que modelitza el canvi quinquennal de (x_1, x_2) és la mateixa en tot el període.

(b) Determineu la matriu d'aquesta aplicació lineal.

(c) Discutiu en quines condicions el centre s'acabarà buidant o al contrari s'assolirà un punt d'equilibri. En aquest cas, calculeu la distribució poblacional que estabilitza els censos.

Solució:

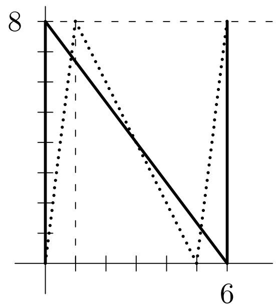
(a) 250.

(b) $\begin{pmatrix} 0'6 & 0'1 \\ 0'4 & 0'9 \end{pmatrix}$.

(c) 200.

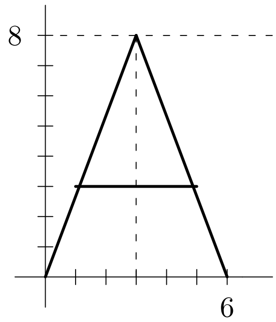
7.14. (*) Es pretén transformar lletres de caligrafia vertical en lletres inclinades mitjançant una adequada transformació en el pla.

(a) Justifiqueu que existeix un endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ que transforma la lletra N de traç continu en la figura, en la de traç discontinu.



(b) Determineu la seva matriu en la base natural de $\mathbb{R}^2$.

(c) Calculeu la transformada de la lletra A de la figura



7.15. (*) Els moviments en el pla (translació i rotació) no són aplicacions lineals. Tanmateix, en els programes d'animació per ordinador interessa poder tractar-los també matricialment. A tal efecte, s'identifica $\mathbb{R}^2$ amb el pla $\Pi = \{(x, y, z) : z = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ mitjançant

$$(x, y) \longleftrightarrow (x, y, 1).$$

Considerem, en $\mathbb{R}^2$:

(1) un endomorfisme de matriu, en la base natural, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(2) la translació $(x, y) \longrightarrow (x + h,\ y + k)$.

(3) una rotació d'angle α al voltant del punt (p, q).

(a) Verifiqueu que (2) i (3) no són endomorfismes de $\mathbb{R}^2$.

(b) Demostreu que tots tres són restriccions a Π de sengles endomorfismes de $\mathbb{R}^3$, i calcular-ne la seva matriu en la base natural.

7.16. Calculeu el determinant dels endomorfismes de $M_2(\mathbb{R})$ definits per:

(a) $f(A) = A^t$.

(b) $f(A) = MA$, on $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Solució:

(a) $\det f = -1$, ja que la matriu de l'aplicació f en la base natural de $M_2(\mathbb{R})$ és la matriu identitat amb les columnes segona i tercera permutades.

(b) $\det f = (ad - bc)^2 = (\det M)^2$.

(7C) Canvis de bases.

7.21. Essent $E = \mathbb{R}^3$ i $F = \mathbb{R}^2$, considerem l'aplicació lineal $f : E \longmapsto F$ definida per:

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\; 2x_1 - x_3)$$

i les bases:

$$\begin{aligned}
U &= (u_1,\, u_2,\, u_3): \; u_1 = (1,0,0),\, u_2 = (0,1,0),\, u_3 = (0,0,1)\\
\overline{U} &= (\overline{u}_1,\, \overline{u}_2,\, \overline{u}_3): \; \overline{u}_1 = (0,1,1),\, \overline{u}_2 = (1,0,1),\, \overline{u}_3 = (1,1,0)\\
V &= (v_1,\, v_2): \; v_1 = (1,0),\, v_2 = (0,1)\\
\overline{V} &= (\overline{v}_1,\, \overline{v}_2): \; \overline{v}_1 = (1,1),\, \overline{v}_2 = (1,-1)
\end{aligned}$$

(a) Calculeu, aplicant directament la definició, la matriu de f per a les quatre combinacions possibles de parelles de bases anteriors: $A_{UV} = \text{Mat}\,_{UV}(f)$, i anàlogament $A_{U\overline{V}}$, $A_{\overline{U}V}$ $A_{\overline{UV}}$.

(b) Obtingueu les matrius de canvi de base $S : \text{Mat}\,_U\overline{U}$, $T : \text{Mat}\,_V\overline{V}$.

(c) Recalculeu $A_{U\overline{V}}$, $A_{\overline{U}V}$ i $A_{\overline{UV}}$ a partir de A_{UV}, S i T, confirmant que els resultats coincideixen amb els obtinguts a (1).

Solució:

(a) $A_{UV} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\qquad A_{U\overline{V}} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A_{\overline{U}V} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\qquad A_{\overline{UV}} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) $A_{U\overline{V}} = T^{-1}A_{UV}$, $\qquad A_{\overline{U}V} = A_{UV}S$, $\qquad A_{\overline{UV}} = T^{-1}AS$.

7.22. Considerem la derivació $D : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_1[t]$

(a) Calculeu la seva matriu A en les bases ordinàries $(1, t, t^2)$ i $(1, t)$.

(b) Calculeu, aplicant directament la definició, la seva matriu $\overline{A}$ en les bases

$((t-1)^2,\; (t-2)^2,\; (t-3)^2)$ i $(t-1,\; t+1)$.

(c) Obtingueu les matrius de canvi de base S i T, de les bases de (b) respecte a les ordinàries de (a).

(d) Verifiqueu que: $\overline{A} = T^{-1}AS$.

Solució:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $T\overline{A} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = AS$.

7.23. (*) En una pantalla d'ordinador el color es codifica amb tres nombres (R, G, B) corresponents a l'energia que reben respectivament els punts fosforescents rojos, verds i blaus. Tanmateix, el color real que apareix depèn dels materials emprats, de manera que cada fabricant ha de reconvertir-los al standard CIE, codificat per X, Y, Z. És usual, per exemple

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}, \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.29 & 0.150 \\ 0.35 & 0.59 & 0.063 \\ 0.04 & 0.12 & 0.787 \end{pmatrix}.$$

En canvi, per a la TV comercial el color es descriu per un vector (Y, I, Q) relacionat amb el (R, G, B) mitjançant

$$\begin{pmatrix} Y \\ I \\ Q \end{pmatrix} = S_2 \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.596 & -0.275 & -0.321 \\ 0.212 & -0.528 & 0.311 \end{pmatrix}.$$

Suposeu que una transformació de color (un filtre, ...) ve donada en aquesta darrera referència per

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ I_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Y_0 \\ I_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}$$

(a) Expresseu aquesta mateixa transformació en la referència $(R,\ G,\ B)$.

(b) Ídem. en codi CIE per obtenir el mateix efecte visual.

Nota: Indiqueu els resultats en termes de S_1, S_2 i A.

Solució:

$$
\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix} Y_0 \\ I_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \arrow[r, "A"'] & \begin{pmatrix} Y_1 \\ I_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} R_0 \\ G_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \arrow[u, "S_2"] \arrow[d, "S_1"'] & \begin{pmatrix} R_1 \\ G_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \arrow[u, "S_2"'] \arrow[d, "S_1"] \\
\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}
\end{tikzcd}
$$

(a) $(S_2)^{-1}AS_2$.

(b) $S_1(S_2)^{-1}AS_2(S_1)^{-1}$.

7.24. (*) (*Forma canònica de control.*) Un sistema discret de control

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k)\,, \qquad A \in M_n(\mathbb{R})$$

resulta "controlable" si rang $(b,\ Ab,\ A^2b,\ \ldots,\ A^{n-1}b) = n$. Anem a calcular la seva "forma canònica de control" per a $n = 3$.

(a) Considerem primer el cas particular

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Verifiqueu que és controlable.

(ii) Verifiqueu que fent el canvi de base $S = (b \quad Ab \quad A^2b)$ resulta

$$\overline{A} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{b} = S^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Verifiqueu que fent el canvi addicional $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ resulta

$$A_C = (S')^{-1}\overline{A}S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_C = (S')^{-1}\overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) En general, si el sistema és controlable:

(i) Verifiqueu que fent el canvi $S = (b \quad Ab \quad A^2b)$ resulta $\overline{A} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\overline{b} = S^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ per a uns certs paràmetres a_1, a_2, a_3.

(ii) Verifiqueu que fent el canvi addicional $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 1 \end{pmatrix}$ resulta

$$A_C = (S')^{-1}\overline{A}S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \qquad b_C = (S')^{-1}\overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.25. Considerem la transformació en $\mathbb{R}_2[t]$ que a cada polinomi $P(t) \in \mathbb{R}_2[t]$ fa correspondre el seu simètric respecte al punt $(1, 0)$.

(1) Demostreu que és lineal.

(2) Calculeu la seva matriu en la base que considereu més adequada.

(3) Deduïu la seva matriu en la base natural.

(4) Deduïu l'expressió del polinomi transformat del $P(t) = at^2 + bt + c$.

7.26. Sigui $V_1 \subset \mathbb{R}^4$ el subespai engendrat per $B_1 = \{(1,0,1,0),(1,1,1,0)\}$ i $V_2 \subset \mathbb{R}^3$ l'engendrat per $B_2 = \{(1,1,1),(2,1,0)\}$.

Siguin (x_1, x_2) les coordenades d'un vector de V_1 expressat en la base B_1 i definim $f : V_1 \longrightarrow V_2$ de la forma

$$f((x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$$

essent $(x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ un vector de V_2 expressat en la base B_2 de V_2

(a) Doneu la matriu de f en aquestes bases.

(b) És f bijectiva?

(c) Siguin $B_1' = ((0,1,0,0),(2,1,2,0))$ i $B_2' = ((-1,0,1),(0,1,2))$.

Proveu que són dues noves bases per a V_1 i V_2 respectivament i doneu la matriu de f en aquestes noves bases.

Solució:

(a) La matriu de f en les bases $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ és $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) f és bijectiva, ja que $\det A \neq 0$.

(c) La matriu de f en les bases $\mathcal{B}_1'$ i $\mathcal{B}_2'$ és $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(7D) Operacions amb aplicacions lineals.

7.31. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per

$$f(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$$

(a) Trobeu la seva matriu en la base natural.

(b) Ídem en la base formada per $u = (1,0,1)$, $v = (-1,2,1)$, $w = (2,1,1)$.

(c) És f bijectiva? En cas afirmatiu trobeu f^{-1} i doneu les matrius de f^{-1} en les bases definides en (a) i (b).

(d) Proveu que $(f^2 - I)(f - 3I) = 0$.

Solució:

(a) La matriu en la base natural és $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) La matriu en la base (u,v,w) és $B = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 17 & 21 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -14 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Sí, ja que $\operatorname{rang} A = 3$. (O també: Sí, ja que $\det A \neq 0$.) L'aplicació inversa és $f^{-1}(x,y,z) = (x/3, x/3 - y, -x+y+z)$.

La matriu de la inversa en la base natural és $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriu de la inversa en la base (u,v,w) és $B^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} -4 & 82 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 4 & -40 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) És una comprovació. Basta ver que $(A^2 - \mathrm{Id})(A - 3\mathrm{Id}) = 0$. (També es pot comprovar veient que el polinomi característic de l'aplicació f és $Q_f(t) = (t^2-1)(t-3)$, però això correspon a un tema posterior.)

7.32. Sigui $\mathbb{R}_n[x]$ l'espai vectorial dels polinomis de grau menor o igual que n. Es defineixen les aplicacions següents

$$D(P(x)) = P'(x)$$
$$f(P(x)) = P(x) - P'(x)$$

(a) Demostreu que D i f són endomorfismes de $\mathbb{R}_n[x]$.

(b) Demostreu que existeix f^{-1} i que es pot posar en funció de l'aplicació D.

Solució:

(a) Trivial.

(b) Volem calcular la inversa de l'aplicació $f = \mathrm{Id} - D$, on D denota la derivada. Sabem que $D^{n+1} = 0$ en els polinomis de grau $\leq n$. Per tant, usant la identitat $(\mathrm{Id} - D) \circ (\mathrm{Id} + D + D^2 + \cdots + D^n) = \mathrm{Id} - D^{n+1}$, se obté que l'aplicació f és invertible, essent la seva inversa $f^{-1} = \mathrm{Id} + D + D^2 + \cdots + D^n$.

7.33. Sigui $\mathbb{R}[x]$ l'espai vectorial dels polinomis a una variable i a coeficients reals, definim $D, M : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ mitjançant:

1) $D(P(x)) = P'(x)$ (P' polinomi derivat)

2) $M(P(x)) = xP(x)$

(a) Proveu que D, M són lineals.

(b) Proveu que $DM - MD = I$.

(c) Existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $D^n = 0$? Compareu el resultat amb el cas d'ésser $D|\mathbb{R}_n[x]$.

(Quan un endomorfisme f compleix que $f^n = 0$, es diu que és nilpotent).

Solució:

(a) És una demostració.

(b) $D \circ M - M \circ D = \mathrm{Id}$, ja que $D \circ M : p(x) \longmapsto p(x) + xp'(x)$, $M \circ D : p(x) \longmapsto xp'(x)$.

(c) No, encara que la restricció de D al espai $\mathbb{R}_n[x]$ si és nilpotent.

7.34. Sigui E un espai vectorial de dimensió finita. Proveu que no existeixen f, g endomorfismes de E tals que $fg - gf = I$.

Solució: És un problema teòric.

7.35. Sigui E un espai vectorial de dimensió finita i f un endomorfisme de E tal que $fg = gf$ per a tot $g \in End(E)$. Proveu que $f = I$.

Solució: És un problema teòric.

(7E-F) Nucli i imatge d'una aplicació lineal.

7.41. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació que ve definida per

$$f(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x - y + z)$$

(a) Proveu que f és lineal.

(b) Determineu bases de Nuc f i Im f.

(c) És f injectiva? I bijectiva? Pot ser exhaustiva?

Solució:

(a) És una demostració.

(b) Una base del nucli és $((2,1,-1))$.
Una base de la imatge és $((1,0,1),(0,1,0))$.

(c) No. No. No.

7.42. (a) Es defineix una aplicació $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ de la manera:

$$\begin{aligned} f(0,1,1) &= (2,1,-1,0) \\ f(1,0,3) &= (5,2,2,1) \\ f(2,1,0) &= (5,-2,3,2) \end{aligned}$$

i s'estén per linealitat.

(i) Trobeu la matriu de f en les bases naturals de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^4$.

(ii) Determineu una base de Im f i una de Nuc f.

(b) Mateixes qüestions per l'aplicació lineal $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ definida per

$$\begin{aligned} g(1,1,1) &= (3,2,1,4,0) \\ g(0,1,0) &= (0,3,1,0,0) \\ g(2,3,0) &= (0,1,3,0,1) \end{aligned}$$

Solució:

(a) (i) La matriu de f en les bases naturals és $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) L'aplicació és injectiva, ja que $\operatorname{Nuc} f = \{0\}$.
Una base de la imatge és $((2,1,-1,0),(5,2,2,1),(5,-2,3,2))$.

(b) (i) La matriu de f en les bases naturals és $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(ii) L'aplicació és injectiva, ja que $\operatorname{Nuc} f = \{0\}$.
Una base de la imatge és $((3,2,1,4,0),(0,3,1,0,0),(0,1,3,0,1))$.

7.43. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ donat per

$$f(x,y,z) = ((p-2)x + 2y - z, 2x + py + 2z, 2px + 2(p-1)y + (p+1)z)$$

(a) Calculeu els valors de p per a que dim Nuc $f \neq 0$.

(b) Trobeu una base de Nuc f per a cada cas.

(c) Trobeu una base de Im f en el cas que $f(4,0,-4) = 0$.

Solució:

(a) $\operatorname{Nuc} f \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} f < 3 \Leftrightarrow \det f = 0 \Leftrightarrow p = 1$.

(b) Si $p = 1$, una base del nucli és $((1, 0, -1))$.

(c) Quan $f(4, 0, -4) = (0, 0, 0)$, necessàriament $p = 1$.
Si $p = 1$, una base de la imatge és $((-1, 2, 2), (2, 1, 0))$.

7.44. Definiu una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que tingui per nucli el subespai vectorial $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 3y + t = 0, y - t = 0\}$. Doneu la matriu de f en les bases naturals de $\mathbb{R}^4$ i de $\mathbb{R}^2$. És f exhaustiva?

Solució: Una possibilitat és l'aplicació $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida per

$$f(x, y, z, t) = (x - 3y + t, y - t).$$

La matriu d'aquesta aplicació en les bases naturals és $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
L'aplicació f és exhaustiva, ja que $\operatorname{rang} f = 2$.

7.45. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ associada a una aplicació lineal f definida sobre $\mathbb{R}^3$ respecte la base natural.

(a) Trobeu els subespais $\operatorname{Im} f$ i $\operatorname{Nuc} f$.

(b) Trobeu una base de $\mathbb{R}^3$ per a la qual la matriu de f en aquesta base sigui

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució:

(a) $\operatorname{Nuc} f = [(1, 0, 0)]$ e $\operatorname{Im} f = [(2, 0, 0), (1, 3, 0)]$.

(b) Una possible base és la formada pels vectors $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ i $u_3 = \left(0, -\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$.

7.46. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'aplicació que té per matriu en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Trobeu $u = (u_1, u_2, u_3)$, una base de $\mathbb{R}^3$, i $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, una base de $\mathbb{R}^4$, tal que la matriu de f en aquestes bases sigui

$$M_{uv}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució: Una possible base u és la formada pels vectors $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$ i $u_3 = (-2,1,1) \in \operatorname{Nuc} f$; mentre que una possible base v és la formada pels vectors $v_1 = f(u_1) = (1,-1,2,0)$, $v_2 = f(u_2) = (1,1,0,-1)$, $v_3 = (0,0,1,0)$ i $v_4 = (0,0,0,1)$.

7.47. Donada $A \in M_2(\mathbb{R})$ definim l'aplicació

$f_A : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ de la forma $f_A(B) = AB - BA$.

(a) Proveu que $\forall\, A \in M_2(\mathbb{R})$, f_A és lineal.

(b) Doneu la matriu de f_A en la base natural de $M_2(\mathbb{R})$.

(c) Doneu els valors màxim i mínim que pot prendre $\dim \operatorname{Nuc} f_A$ al variar A.

(d) Doneu exemples de matrius A per a les quals $\dim \operatorname{Nuc} f_A$ assoleix aquests valors extrems i determineu els $\operatorname{Nuc} f_A$ corresponents.

Solució:

(a) Per provar que l'aplicació $f_A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ es lineal només cal veure que

$$\begin{aligned} f_A(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2) &= A(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2) - (\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2)A \\ &= \beta_1(AB_1 - B_1 A) + \beta_2(AB_2 - B_2 A) \\ &= \beta_1 f_A(B_1) + \beta_2 f_A(B_2). \end{aligned}$$

(b) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la matriu de f_A és $M(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$.

(c) El valor màxim (respectivament, mínim) que pot tenir $\dim \operatorname{Nuc} f_A$ al variar la matriu A és 4 (respectivament, 2). (Nota: $[\mathrm{Id}, A] \subset \operatorname{Nuc} f_A$.)

(d) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, aleshores $\operatorname{Nuc} f_A = [\mathrm{Id}, A] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$.

Si $A = \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, aleshores $\operatorname{Nuc} f_A = M_2(\mathbb{R})$.

7.48. Sigui $\mathbb{R}[x]$ l'espai vectorial dels polinomis a una variable a coeficients reals. Es consideren les aplicacions f i g de $\mathbb{R}[x]$ definides per:

$$f(P(x)) = \frac{P(x) - P(0)}{x}; \quad g(P(x)) = xP(x)$$

(a) Proveu que f, g són lineals.

(b) Determineu Nuc f i Im f.

(c) Determineu Nuc g i Im g.

(d) Estudieu la injectivitat i l'exhaustivitat de f i g.

(e) Calculeu $f \circ g$ i $g \circ f$.

(f) Compareu els resultats de (d) i (e) amb el cas d'un endomorfisme d'un espai vectorial de dimensió finita.

Solució:

(a) És una demostració.

(b) $\operatorname{Nuc} f = [1] \neq \{0\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[x]$.

(c) $\operatorname{Nuc} g = \{0\}$ e $\operatorname{Im} g = [x, x^2, x^3, \ldots] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(0) = 0\} \neq \mathbb{R}[x]$.

(d) f és exhaustiva, però no injectiva. g és injectiva, però no exhaustiva.

(e) $f \circ g = \mathrm{Id} \neq g \circ f$, ja que $f \circ g : p(x) \mapsto p(x)$ i $g \circ f : p(x) \mapsto p(x) - p(0)$.

(f) La moraleja d'aquest problema és la següent: *"Els espais de dimensió finita són més simples que els espais de dimensió infinita"*. Por exemple, si E és un espai de dimensió finita i tenim dos endomorfismes $f, g : E \to E$ sabem que:

(i) f és injectiva si i només si f és exhaustiva.

(ii) $f \circ g = \mathrm{Id} \Leftrightarrow g \circ f = \mathrm{Id} \Leftrightarrow g = f^{-1} \Leftrightarrow f = g^{-1}$.

Aquestes propietats són falses quan $\dim E = \infty$.

7.49. Siguin E un k-espai vectorial i $f \in End(E)$. Proveu:

(a) $\forall\, n \geq 1$, Im $f^{n+1} \subset$ Im f^n i Nuc $f^n \subset$ Nuc f^{n+1}.

(b) Suposem que $\dim E$ és finita. Aleshores, si $\exists\, m$ tal que Im $f^m =$ = Im f^{m+1}, també es verifica Nuc $f^m =$ Nuc f^{m+1}. És cert el recíproc? I si $\dim E$ no és finita?

Indicació: $E = \mathbb{R}[x]$, f la derivació i $m = 0$.

Solució: És un problema teòric.

(7G) Imatge i antiimatge de subespais.

7.51. Sigui $f : \mathbb{R}_3[t] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'aplicació lineal definida per

$$f(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a - b - c + d & 2a - b - c - 3d \\ 3a - 2b - 2c - 2d & a - 4d \end{pmatrix}$$

(a) Calculeu la matriu A de f en les bases naturals.

(b) Calculeu la dimensió i trobeu una base de Nuc f i de Im f.

(c) Considerem el subespai $G \subset \mathbb{R}_3[t]$ definit per $G = \{a+b+d=c=0\}$.

  (i) Expresseu G en la forma $G = \text{Im } C$, on C és [la matriu, en la base natural, de] un endomorfisme de $\mathbb{R}_3[t]$.

  (ii) Justifiqueu que el subespai $f(G) \in M_2(\mathbb{R})$ pot representar-se per $f(G) = \text{Im } (C\ A)$.

  (iii) Calculeu la dimensió de $f(G)$ i trobeu-ne una base.

(d) Considerem el subespai $H \subset M_2(\mathbb{R})$ format per les matrius simètriques

  (i) Expresseu H en la forma $H = \text{Nuc } B$, on B és [la matriu, en la base natural, de] un endomorfisme de $M_2(\mathbb{R})$.

  (ii) Justifiqueu que el subespai $f^{-1}(H) \subset \mathbb{R}_3[t]$ pot representar-se per $f^{-1}(H) = \text{Nuc } (A\ B)$.

  (iii) Calculeu la dimensió de $f^{-1}(H)$ i trobeu-ne una base.

7.52. Siguin $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ aplicacions lineals. Proveu que $\text{Nuc } (gf) = f^{-1}(\text{Nuc } g)$.

Solució: És un problema teòric.

7.53. Siguin E, F_i i G, $i = 1, 2$, espais vectorials de dimensió finita i f_i, g_i, aplicacions lineals

$$E \xrightarrow{f_i} F_i \xrightarrow{g_i} G, \quad i = 1, 2$$

tals que $g_1 f_1 = g_2 f_2$, $\text{rang } f_1 = \text{rang } g_1 = \dim F_1$. Proveu que $\dim F_1 \leq \dim F_2$.

Miscel·lània temes 1 a 7

M.1. Sigui $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espai vectorial (amb les operacions habituals) de les funcions reals de variable real. Es diu que $f \in E$ és una funció parella si $f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, i es diu que $g \in E$ és una funció senar si $g(-x) = -g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(a) Demostreu que el conjunt P de les funcions parelles és un subespai vectorial de E.

(b) Demostreu que el conjunt I de les funcions senars és un subespai vectorial de E.

(c) Demostreu que $E = P + I$. És directa la suma?

Solució:

(a) És una demostració.

(b) És una demostració.

(c) La suma és directa, ja que donada una funció $h(x) \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existeixen unes úniques funcions $f(x) \in P$ i $g(x) \in I$ tales que $h(x) = f(x) + g(x)$:

$$f(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2}, \qquad g(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2}.$$

M.2. Essent $E = C^\infty(\mathbb{R})$ i $F \subset E$ el subespai generat per les funcions $1, \sin 2t, \cos 2t$,

(a) Demostreu que aquestes funcions formen una base$B$ de F.

(b) Demostreu que les funcions $\sin^2 t$, $\cos^2 t$, $\sin t \cos t$, també formen una base $\overline{B}$ de F.

(c) Calculeu les matrius de canvi de base.

(d) Determineu les coordenades, en ambdues bases, de la funció $(\sin t + 3\cos t)^2$.

Solució:

(a) Només cal veure que són linealment independents. Suposem $\lambda + \mu \sin wt + \eta \cos 2t = 0$. Aleshores:

per a $t = 0$: $\lambda + \eta = 0$

per a $t = \pi/2$: $\lambda - \eta = 0$.

(b) Només cal veure que generen B:

$$\begin{aligned} 1 &= \sin^2 t + \cos^2 t \\ \cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t \\ \sin 2t &= 2 \sin t \cos t\,. \end{aligned}$$

(c) $S^{-1} = \operatorname{mat}_{\overline{B}} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) $(\sin t + 3\cos t)^2 = \sin^2 t + 6\sin t\cos t + 9\cos^2 t$

$$\mathrm{mat}_{\overline{B}}(\sin t + 3\cos t)^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{mat}_B(\sin t + 3\cos t)^2 = S\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

M.3. (*) En $E = C^\infty(\mathbb{R})$, considerem el subespai $F \subset E$ definit per:

$$F = [1,\ \sin t,\ \cos t,\ \sin 2t,\ \cos 2t]$$

(a) Demostreu que els generadors donats són linealment independents i per tant formen una base de F.

(b) Verifiqueu que les funcions $\sin^2 t$, $\cos^2 t$, $\sin t\,\cos t$ pertanyen a F, i calculeu les seves coordenades en la base donada.

(c) Verifiqueu que l'aplicació derivació és un endomorfisme de F, i calculeu la seva matriu en la base donada.

(d) Empreu-la per calcular $D^4(\sin t + 2\cos t)^2$.

M.4. Sigui $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$ definida per:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a-b & c \\ b-a & 0 & d-c \\ -c & c-d & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Proveu que f és lineal.

(b) Doneu una base del Nuc f i una altra de la Im f.

(c) Doneu la matriu de f en les bases naturals de $M_2(\mathbb{R})$ i $M_3(\mathbb{R})$.

(d) Trobeu un complementari del Nuc f en $M_2(\mathbb{R})$ i un complementari de la Im f en $M_3(\mathbb{R})$.

Solució:

(a) És una demostració.

(b) Una base de $\mathrm{Nuc}\, f$ és $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Una base de $\mathrm{Im}\, f$ és $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

(c) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Un complementari del nucli en $M_2(\mathbb{R})$ és $\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

Un complementari de la imatge en $M_3(\mathbb{R})$ és $[M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{31}, M_{32}, M_{33}]$, on M_{ij} denota a la matriu de $M_3(\mathbb{R})$ els elements de la qual són tots nuls, excepte el situat en la fila i i la columna j, que és igual a un.

M.5. Sigui f l'aplicació entre els espais $\mathbb{R}^3$ i $M_2(\mathbb{R})$ definida per:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_3 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

(a) És f lineal ?

(b) Obteniu la dimensió i una base de Nuc f i de Im f.

(c) És f injectiva ? És f exhaustiva ?

(d) Doneu la matriu de f en les bases (u_i) de R^3

$$\begin{aligned} u_1 &= 3e_1 + e_2 \\ u_2 &= e_2 - e_3 \\ u_3 &= e_2 + e_3 \end{aligned}$$

essent (e_i) la base natural de R^3, i (v_i) de $M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} v_1 &= M_{11} + M_{12} + M_{22} \\ v_2 &= M_{12} \\ v_3 &= M_{21} \\ v_4 &= M_{22} \end{aligned}$$

essent M_{ij} la matriu el terme de la qual que ocupa el lloc ij és 1 i zero la resta.

Solució:

(a) Sí.

(b) Una base de $\operatorname{Nuc} f$ és $((1,1,1))$, llavors $\dim \operatorname{Nuc} f = 1$.
Una base de $\operatorname{Im} f$ és $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, per tant $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f = 2$.

(c) L'aplicació no és injectiva, ja que $\operatorname{Nuc} f \neq \{0\}$.
L'aplicació no és exhaustiva, ja que $2 = \operatorname{rang} f < \dim M_2(\mathbb{R}) = 4$.

(d) La matriu de f en les bases u i v és $M_{u,v}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

M.6. Siguin $f, g \in End\,(E)$, on $E = M_2(\mathbb{R})$ definides per

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-d & b+c \\ b+c & a-d \end{pmatrix} \; ; \quad g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ b-c & a-d \end{pmatrix}$$

(a) Proveu que f, g són lineals.

(b) Determineu Nuc f i Nuc g, provant que ambdós són de dimensió dos. Doneu una base de cadascun dels nuclis.

(c) Calculeu $f \circ g$ i $g \circ f$.

(d) Proveu que Im $f =$ Nuc g.

(e) Determineu les matrius de f en les següents bases

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\text{i} \\ u_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solució:

(a) És una demostració.

(b) $\text{Nuc}\, f = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$ i $\text{Nuc}\, g = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$.

(c) $f \circ g : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2(b-c) \\ 2(b-c) & 0 \end{pmatrix}$ i $g \circ f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) És una demostració.

(e) Les matrius de f en les bases $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ i $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ són

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_u(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

M.7. (*) Considerem un sistema de control

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu\,, & A \in M_n\,, \quad B \in M_{n\times m} \\ y = C\,x\,, & C \in M_{p\times n} \end{cases}$$

(a) Demostreu que són A-invariants els subespais

$$\begin{aligned} K &= \text{Im}\,(B\,, \quad AB\,, \dots\,, \quad A^{n-1B}) \\ L &= \text{Nuc} \begin{pmatrix} C \\ C\,A \\ \dots \\ C\,A^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Justifiqueu que si fem el canvi de base $\overline{x} = S^{-1}x$, les matrius resultants són:

$$\overline{A} = S^{-1}AS\,, \qquad \overline{B} = S^{-1}B\,, \qquad \overline{C} = CS\,.$$

(c) En la descomposició de Kalman es consideren bases adaptades a $K \cap L$, K i L. Per al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)\,.$$

(i) Verifiqueu que:

$$\dim K = 3\,, \qquad \dim L = 2\,, \qquad \dim(K \cap L) = 1,, \qquad \dim(K + L) = 4\,.$$

(ii) Determineu una base $(v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4)$ de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$\begin{array}{rll} v_1 & \text{és base de} & K \cap L \\ v_1,\, v_2,\, v_3 & \text{és base de} & K \\ v_1,\, v_4 & \text{és base de} & L \end{array}$$

(iii) Calculeu les matrius $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ que resulten d'efectuar aquest canvi.

(iv) Determineu mes matrius, en les bases anteriors, de les restriccions de A a K i a L.

Solució:

(a)

(b)

(c) $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$v_1 = (1, 0, 0, 1)\,, \quad v_2 = (2, 0, 1, 0)\,, \quad v_3 = (0, 0, -2, 0)\,, \quad v_4 = (0, 1, 0, 0)$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{C} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

$$\overline{A}_{|K} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_{|L} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

M.8. En $E = \mathbb{R}_2[t]$, considerem l'aplicació $f : E \longrightarrow E$ que a cada polinomi $P(t) \in E$ li fa correspondre el $f(P(t)) \equiv \widehat{P}(t)$ definit per:

$$\widehat{P}(1) = P(1)\,, \qquad \widehat{P}(2) = 2P(2)\,, \qquad \widehat{P}(3) = 3P(3)$$

(a) Justifiqueu que f està ben definida.

(b) Verifiqueu que: $\widehat{1} = t\,,\ \ \widehat{t} = t^2\,.$

(c) Discutiu si les condicions de la definició impliquen $\widehat{P}(4) = 4P(4)\,.$

(d) Demostreu que f és lineal.

(e) Calculeu els polinomis imatges dels $P_{12}(t) = (t-1)(t-2)\,,\ \ P_{23}(t) = (t-2)(t-3)\,,$ $P_{31}(t) = (t-3)(t-1)\,.$

(f) Demostreu que aquests polinomis formen una base de E.

(g) Calculeu la matriu de f en aquesta base.

(h) Empreu-la per obtenir una expressió explícita de $f(a+bt+ct^2)$ en termes dels coeficients a, b, c.

M.9. Sigui $f \in \mathrm{End}(E)$ tal que $f^2 = I$. Llavors si $F = \{x \in E |\, f(x) = x\}$ i $G = \{x \in E |\, f(x) = -x\}$, proveu que $E = F \oplus G$.

Solució: És un problema teòric.

M.10. Sigui E un K-espai vectorial, direm que $p \in End\,(E)$ és un projector si i només si $p^2 = p$.

(a) Demostreu que p és un projector si i només si $I - p$ és un projector.

(b) Demostreu que si p és un projector llavors Im $p \oplus$ Nuc $p = E$. És cert el recíproc ?.

(c) Siguin p_1, p_2 projectors, demostreu que $p_1 + p_2$ és un projector si i només si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.

Solució: És un problema teòric.

M.11. Sigui $f \in End(\mathbb{R}^2)$ qualsevol.

(a) Demostreu que l'àrea del triangle de costats $f(e_1)$ i $f(e_2)$ és $|\det f|$.

(b) Deduïu que per a tot polígon P del pla és:

$$\text{àrea}\ (f(P)) = |\det f|\ \text{àrea}\ (P)\,.$$

Nota: el resultat es generalitza a dimensions superior. Així, per a $n = 3$, és:

$$\text{volum}\ (f(P)) = |\det f|\ \text{volum}\ (P)\,.$$

8. Diagonalització

(8A) Subespais invariants.

8.1. (a) Sigui F el subespai de $\mathbb{R}^4$ definit per

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+z=0,\ y+2z+t=0\}\,.$$

Proveu que F és invariant per l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^4$, la matriu del qual en base canònica és $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -18 & -9 \\ 3 & 7 & 14 & 6 \\ 0 & 14 & 29 & 13 \\ -3 & -20 & -42 & -17 \end{pmatrix}$.Determineu una base de F, i calculeu la matriu (en aquesta base) de la restricció $f_{|F}$. Amplieu-la a una base de $\mathbb{R}^4$, i calculeu la matriu de f en aquesta base adaptada.

(b) Mateixa qüestió, essent

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x+z-2t=0,\ x+y-2t=0\}$$

i $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & 3/2 & -2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solució:

(a) Donat un vector arbitrari $(x,y,z,t) \in F$, notem $(x',y',z',t') = f(x,y,z,t)$. Aleshores $(x',y',z',t') \in F$, ja que

$$\begin{aligned} x'+z' &= (3x-10y-18z-9t)+(14y+29z+13t) \\ &= 3\cdot(x+z)+4\cdot(y+2z+t)=0, \\ y'+2z'+t' &= (3x+7y+14z+6t)+2\cdot(14y+29z+13t)+ \\ &\quad (-3x-20y-42z-17t) \\ &= 15\cdot(y+2z+t)=0. \end{aligned}$$

(b) Una base de F és (u_1,u_2), on $u_1=(1,-1,-1,0)$ i $u_2=(2,0,0,1)$. Per provar que F és invariant només cal veure que

$$f(u_1) = (-1,-1-1,-1) \in F, \qquad f(u_2) = (2,0,0,1) \in F.$$

8.2. Considerem l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ amb matriu (en la base natural) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

(a) Verifiqueu que Nuc A i Im A són subespais A-invariants.

(b) Determineu les restriccions a Nuc A i Im A.

(c) Verifiqueu que Nuc $A \oplus \mathrm{Im}\ A = \mathbb{R}^3$, i calculeu la seva nova matriu en una base adaptada a aquests subespais.

Solució:

(a) Nuc $A = [v_1]$, $v_1 = (2, -2, 1)$; Im $A = [w_1, w_2]$, $w_1 = (1, 1, 0)$, $w_2 = (0, 1, 2)$; $Av_1 = 0$; $Aw_1 = 9w_1$; $Aw_2 = 9w_2$.

(b) La matriu de la restricció a Nuc A en la base (v_1) és: (0)

La matriu de la restricció a Im A en la base (w_1, w_2) és: $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

(c) $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow S^{-1}AS = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$.

8.3. (*) Si A és la matriu d'un sistema (d'equacions, dinàmic,...) i F_1, F_2 són subespais A-invariants amb $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^n$, aleshores un canvi de base S adaptat a F_1 i F_2 descompon el sistema en dos subsistemes desacoblats, la qual cosa simplifica el seu estudi o resolució. Vegem-ne un exemple:

(1) Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ i els subespais de $\mathbb{R}^4$:

$$F_1 = [v_1, v_2]; \quad v_1 = (-2, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, -2, 1, 1)$$
$$F_2 = [w_1, w_2]; \quad w_1 = (1, 1, -2, 1), \quad w_2 = (1, 1, 1, -2)$$

(i) Verifiqueu que F_1 i F_2 són A.invariants, i que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^4$.

(ii) Sigui S la matriu de canvi a la base $(v_1, v_2, w_, w_2)$. Verifiqueu que resulta

$$\overline{A} = S^{-1}AS = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Considerem el sistema d'equacions $Ax = 0$, essent A la matriu anterior.

(i) Verifiqueu que en fer el canvi de base S anterior, obtenim els següents dos subsistemes desacoblats:

$$\overline{x}_1 = 0; \qquad \overline{x}_3 = 0, \quad \overline{x}_3 + \overline{x}_4 = 0.$$

(ii) Deduïu que la solució del sistema és $x = S \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

(3) Considerem el sistema d'EDO lineals $\dot{x}(t) = Ax(t)$, essent A la matriu anterior.

(i) Verifiqueu que en fer el canvi de base S anterior, obtenim els següents dos subsistemes desacoblats:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\overline{x}}_1(t)=0\\ \dot{\overline{x}}_2(t)=3\overline{x}_1(t)\end{array}\right\}\qquad\qquad \left.\begin{array}{l}\dot{\overline{x}}_3(t)=3\overline{x}_3(t)\\ \dot{\overline{x}}_4(t)=3\overline{x}_3(t)+3\overline{x}_4(t)\end{array}\right\}$$

(ii) Deduïu que la solució del sistema inicial és: $x=S\begin{pmatrix} c_1\\ 3c_1t+c_2\\ c_3e^{3t}\\ c_4e^{3t}+3c_3te^{3t}\end{pmatrix},\quad c_i\in\mathbb{R}.$

Solució:

(1) (i) $A(v_1)=3v_2\,.$
$A(v_2)=0\,.$
$A(v_3)=3v_3+3v_4\,.$
$A(v_4)=3v_4\,.$
rang $(v_1,\ v_2,\ w_1,\ w_2)=4\,.$

(ii) $S^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}.$

(2) (i) $Ax=0\Leftrightarrow S^{-1}ASS^{-1}x=0\Leftrightarrow \overline{A}\,\overline{x}=0\,.$

(ii) $\overline{x}=(0,\,z,\,0,\,0)\,,\qquad z\in\mathbb{R}\,.$

(3) (i) $\dot{x}=Ax\Leftrightarrow S^{-1}\dot{x}=S^{-1}ASS^{-1}x\Leftrightarrow \dot{\overline{x}}=\overline{A}\,\overline{x}\,.$

(ii) $$\left.\begin{array}{l}\overline{x}_1=c_1\\ \overline{x}_2=3c_1t+c_2\\ \overline{x}_3=c_3e^{3t}\\ \overline{x}_4=c_4e^{3t}+3c_3te^{3t}\end{array}\right\}\qquad \begin{array}{l}\dot{\overline{x}}_1=0\\ \dot{\overline{x}}_2=3c_1=3\overline{x}_1\\ \dot{\overline{x}}_3=3c_3e^{3t}=3\overline{x}_3\\ \dot{\overline{x}}_4=3c_4e^{3t}+9c_3te^{3t}+3c_3e^{3t}=3\overline{x}_4+3\overline{x}_3\end{array}$$

8.4. (**) Si A és la matriu d'un sistema (dinàmic, de control,...) i F un subespai A-invariant, es pot considerar el subsistema "restricció" a F, la matriu del qual es pot obtenir-se aplicant a A un canvi de base S adaptat a F. Vegem-ne un exemple.

(1) Considerem el sistema de control

$$\dot{\overline{x}}(t)=\overline{A}\,\overline{x}(t)+\overline{B}u(t)\,,\qquad \overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&-2\end{pmatrix},\qquad \overline{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

i el subespai $\overline{A}$-invariant $\overline{F}=[c_1,\,c_2]$. Demostreu que si $\overline{x}(0)\in\overline{F}$, aleshores:

(i) També $\overline{x}(t)\in\overline{F}$, per a tot temps $t\in\mathbb{R}$ i tot control $u(t)$.

(ii) Més explícitament, és $\overline{x}(t) = (x_c(t),\, 0)$, essent $x_c(t)$ determinat pel sussistema "restricció":

$$\dot{x}_c(t) = A_c\, x_c(t) + B_c u(t)\,, \qquad A_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{B}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Considerem el sistema de control

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + Bu(t)\,, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Verifiquem que el subespai $F = [v_1,\, v_2]$, $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, és A-invariant.

(ii) Verifiquem que resulta l'anterior si fem el canvi de base $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Deduïm que si $x(0) \in F$, també $x(t) \in F$ per a tot temps t i tot control $u(t)$, i que el seu valor ve donat per $x(t) = S \begin{pmatrix} x_c(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) (**opt.**) Més en general, anem a veure que la restricció d'un sistema al seu subespai de controlabilitat és controlable. A tal efecte, considerem un sistema de control

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\,.$$

(i) Demostreu que el subespai de controlabilitat

$$K = \operatorname{Im} K(A,\, B)\,, \qquad K(A,\, B) = (B,\, AB,\, \ldots,\, A^{n-1}B)$$

és A-invariant.

(ii) Verifiquem que si S és un canvi de base adaptat a K, resulta

$$\overline{A} = S^{-1}AS = \left(\begin{array}{c|c} A_c & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right), \qquad \overline{B} = \left(\begin{array}{c} B_c \\ \hline 0 \end{array}\right).$$

(iii) Se'n diu "restricció" a K al subsistema

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u(t)\,.$$

En efecte verifiquem que, com abans, si $x(0) \in K$ aleshores

$$x(t) = S \begin{pmatrix} x_c(t) \\ 0 \end{pmatrix} \in K\,,$$

per a tot temps t i tot control $u(t)$.

(iv) Demostreu que aquesta restricció a K és controlable, és a dir, que és màxim el rang de la matriu

$$K(A_c,\, B_c) = (B_c,\, A_cB_c,\, \ldots,\, A_c^{n-1}B_c)\,.$$

(v) Resulta doncs que mitjançant un control $u(t)$ adequat: tot estat de K és assolible des de qualsevol estat inicial $x(0) \in K$, amb tots els estats intermedis també pertanyents a K.

8.5. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme tal que en la base natural de $\mathbb{R}^3$ ve definit per $f(x,y,z) = (2x + \alpha y + z, x + (\alpha+1)y + z, \alpha x + y + 2z)$. Determineu per a quins valors de $\alpha \in \mathbb{R}$ el subespai $F = [(1,-2,1),(2,-1,-1)]$ és invariant per f.

Solució: El subespai F és invariant si i només si $\alpha = 1$.

8.6. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x,y,z) = (\alpha x + 2y - 2z,\ (\alpha-3)x + \alpha^2 y + 2z,\ y + (\alpha+1)z)\,.$$

Determineu per a quins valors de $\alpha \in \mathbb{R}$ el subespai $F = [(1,1,0),(1,0,1)]$ és invariant per f.

Solució: El subespai F és invariant si i només si $\alpha = -2$.

8.7. (**opt.**) Sigui $f \in End\,(\mathbb{R}_2[x])$ l'endomorfisme tal que

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 - x^2 \\ f(x^2) &= -1 + 2x^2 \\ f(1+x) &= 2 + 2x - x^2 \end{aligned}$$

Si $F = [1 + x^2]$, proveu que F és invariant per f i trobeu un subespai G complementari de F, i que també sigui invariant per f.

Solució: Un subespai complementari invariant de $F = [1+x^2]$ en $\mathbb{R}_2[x]$ és $G = [x, 1-x^2]$. Resulta molt interessant comparar aquest problema amb el problema 8 del tema 6 (diagonalització), on es provarà que l'aplicació f és diagonalitzable, essent els seus VAPs els números $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 3$, mentre que els seus respectius VEPs són els polinomis $P_1(x) = 1 + x^2$, $P_2(x) = x$ i $P_3(x) = 1 - x^2$.

(8B) VAPs i VEPs.

8.11. Determineu els VEPS dels següents endomorfismes del pla

(a) rotació de 45°

(b) simetria respecte a un eix

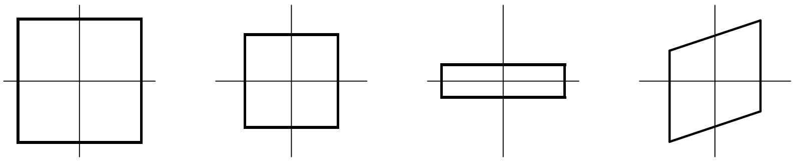
(c) simetria respecte a l'origen.

8.12. Determineu els VEPS dels següents endomorfismes del pla que transormen el quadrat de la figura (a) en

(a) el quadrat de la figura (b)

(b) el rectangle de la figura (c)

(c) el paral·lelogram de la figura (d).



(a) (b) (c) (d)

8.13. En $E = C^\infty(\mathbb{R})$, determineu els valors propis i vectors propis de l'endomorfisme derivació, D, i del derivada segona, D^2.

Solució:

	VAP	VEP
D	0	constants
	$\lambda \neq 0$	$e^{\lambda x}$
D^2	0	constants
	λ^2	$e^{\lambda x}$, $e^{-\lambda x}$
	$-\lambda^2$	$\sin \lambda x$, $\cos \lambda x$

8.14. Essent $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ esbrineu si $v = (1, \alpha, 1, \beta)$ n'és un vector propi per a algun valor de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculeu, aleshores, el valor propi corresponent.

Solució:

$$Av = \lambda v \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 1 + 2\alpha + \beta & = & \lambda \\ 1 - \alpha & = & \lambda\alpha \\ 1 + 2\alpha & = & \lambda \\ 2\beta & = & \lambda\beta \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \beta & = & 0 \\ \lambda & = & 1 + 2\alpha \\ 1 - \alpha & = & (1 + 2\alpha)\alpha \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \beta & = & 0 \\ \alpha & = & \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \\ \lambda & = & \pm\sqrt{3} \end{array} \right.$$

8.15. Essent $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Verifiqueu que en són vectors propis:

$$v_1 = (1,\, 1,\, 1,\, 1)\,, \qquad v_2 = (2,\, 2,\, 2,\, 3)\,, \qquad v_3 = (-3,\, 2,\, 2,\, 2)\,.$$

(b) Verifiqueu que diagonalitza.

(c) Calculeu la seva forma diagonal i una base de vectors propis

Solució:

(a) $Av_1 = 4v_1 \;, \qquad \lambda_1 = 4$

$Av_2 = 3v_2 \;, \qquad \lambda_2 = 3$

$Av_3 = -v_3 \;, \qquad \lambda_3 = -1$

(b) $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \Longleftrightarrow 4 = 6 + \lambda_4 \Longleftrightarrow \lambda_4 = -2$. A diagonalitza ja que tots quatre valors propis són simples.

(c) $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 3 & & \\ & & -1 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$, on $S = (v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4)$, essent

$$v_4 \in \operatorname{Nuc}(A + 2I) = \operatorname{Nuc} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 15 \\ 25 \end{pmatrix} \right]$$

8.16. (*) Considereu el sistema de control

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + b\,u \\ A &= \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En Teoria de Control interessa obtenir matrius F de manera que $A + b\,F$ tingui valors propis $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \lambda_4$ prefixats qualsevol (se'n diu "assignació de pols per realimentació d'estats").

(a) Prenent $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 6 & 9 \\ 12 & 8 & 27 & 27 \end{pmatrix}^{-1}$ verifiqueu que $\overline{A} = S^{-1} A\, S$ és una matriu "companion"i que $\overline{b} = S^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Calculeu $\overline{F}$ per tal que $\overline{A} + \overline{b}\,\overline{F}$ tingui valors propis $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \lambda_4$.

(c) Deduïu la realimentació F desitjada.

Solució: $F = \overline{F}\, S^{-1}$, ja que $S(\overline{S} + \overline{b}\,\overline{F})S^{-1} = S\,\overline{A}\,S^{-1} + S\overline{b}\,\overline{F}\,S^{-1} = A + b\,F$.

8.17. Trobeu els valors propis de les matrius

(a) $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \\ b & c & a & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$. (b) $B = \begin{pmatrix} b & a & 0 & a \\ a & b & 0 & a \\ b & a & c & 0 \\ a & b & 0 & a \end{pmatrix}$.

Solució:

(a) Els VAPs són $\lambda_1 = a+b+c+d,\ \lambda_2 = a-b,\ \lambda_3 = a-c$ i $\lambda_4 = a-d$.

(b) Els VAPs són $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = b-a,\ \lambda_3 = 2a+b$ i $\lambda_4 = c$.

8.18. (*) (a) Verifiqueu que l'endomorfisme f de R^3 definit per

$$f(e_1) = \frac{1}{5}(3,\, 4,\, 0)\,, \qquad f(e_2) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(4,\, -3,\, 5)\,, \qquad f(e_3) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(4,\, -3,\, -5)\,.$$

és una rotació.

(b) Trobeu-ne l'eix.

Solució:

(a) És immediat comprovar que:

$$\langle f(e_1),\, f(e_2)\rangle = 0\,, \qquad \|f(e_1)\| = \|f(e_2)\| = 1\,, \qquad f(e_3) = f(e_1) \wedge f(e_2)\,.$$

(b) L'eix de rotació serà generat per qualsevol VEP del VAP $\lambda = 1$:

$$\text{eix } = [v_1]\,, \qquad v_1 = (2,\, 1,\, \sqrt{2}-1)\,.$$

8.19. **(opt.)** En l'espai $\mathbb{R}[x]$ dels polinomis d'una variable a coeficients reals, estudieu l'aplicació L que aplica a $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ el polinomi $L(P) = (2x+1)P - (x^2-1)P'$, essent P' el polinomi derivat de P.

(a) Demostreu que L és lineal i trobeu el grau de $L(P)$.

(b) És exhaustiva aquesta aplicació ?

(c) Determineu els polinomis propis de L.

Solució:

(a) Si $\mathrm{gr}[P(x)] \neq 2,\ \mathrm{gr}[L(P(x))] = \mathrm{gr}[P(x)] + 1$.
Si $\mathrm{gr}[P(x)] = 2,\ \mathrm{gr}[L(P(x))] \leq \mathrm{gr}[P(x)]$.

(b) No, ja que la imatge de L no conté cap polinomi de grau tres.

(c) Els VAPs de l'aplicació L són $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$ i $\lambda_3 = 3$. Per tant, els polinomis (o vectors) propis de l'aplicació són els elements no nuls dels subespais $\mathrm{Nuc}(L-\mathrm{Id}) = [x^2-1]$, $\mathrm{Nuc}(L+\mathrm{Id}) = [x^2-2x+1]$ i $\mathrm{Nuc}(L-3\mathrm{Id}) = [x^2+2x+1]$.

8.20. **(opt.)** Sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^k = 0$, per a un cert k. (Una matriu que compleix aquesta propietat s'anomena nilpotent).

(a) Demostreu que l'únic valor propi de A és el zero. Quin és el polinomi característic de A ?

(b) Deduïu de (a) el polinomi característic de $A+I$. Quin és el valor de $\det(A+I)$?

(c) Sigui $B \in M_n(R)$ tal que $AB = BA$. Demostreu que $\det(A+B) = \det B$.

Solució:

(a) El polinomi característic d'una matriu $n \times n$ nilpotent A es $Q_A(t) = (-t)^n$.

(b) $Q_{A+\mathrm{Id}}(t) = Q_A(t-1) = (1-t)^n$. En particular, $\det(A+\mathrm{Id}) = Q_{A+\mathrm{Id}}(0) = 1$.

(c) És una demostració. (Indicació: Hi ha que distingir el cas $\det B = 0$ del cas $\det B \neq 0$.)

(8D) Diagonalització.

8.21. Estudieu la diagonalització de les següents matrius de $M_n(K)$, per a $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
(b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
(d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

Solució:

(a) El polinomi característic és

$$Q_A(t) = -t^3 + 5t^2 - 9t + 9 = -(t-3)\left(t - 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(t - 1 - \mathrm{i}\sqrt{2}\right).$$

Així doncs, la matriu A té tres VAPs simples (dos complexos conjugats). Per tant, A no diagonalitza ni en $\mathbb{Q}$ ni en $\mathbb{R}$, però si diagonalitza en $\mathbb{C}$.

(b) El polinomi característic és

$$Q_B(t) = -t^3 + 4t^2 + 3t - 2 = -(t+1)\left(t - \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(t - \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right).$$

Així doncs, la matriu B té tres VAPs simples (dos reals, però no racionals). Per tant, B no diagonalitza en $\mathbb{Q}$, però si diagonalitza en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

(c) El polinomi característic és $Q_C(t) = (t-2)^3(t+2)$ i $\dim \mathrm{Nuc}(C - 2\mathrm{Id}) = 3$. Per tant, la matriu C diagonalitza en els tres casos.

(d) El polinomi característic és $Q_D(t) = (t+2)^2(1-t)$ i $\dim \mathrm{Nuc}(D + 2\mathrm{Id}) = 1$. Per tant, la matriu D no diagonalitza en cap cas.

8.22. (a) Sigui A la matriu $A = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

(i) Calculeu els valors propis de A.

(ii) Determineu S tal que $D = S^{-1}AS$ amb D diagonal.

(b) Mateixes qüestions per la matriu $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Solució:

(a) (i) Els VAPs de la matriu A són $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ i $\lambda_3 = \dfrac{1}{4}$.

(ii) Una matriu diagonal D i una matriu de canvi de base S tals que $D = S^{-1}AS$ venen donades per

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) (i) Els VAPs de la matriu B són $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

(ii) Una matriu diagonal D i una matriu de canvi de base S tals que $D = S^{-1}BS$ venen donades per

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.23. (*) Les matrius d'acoblament magnètic en diferents tipus de màquines d'inducció són del tipus anomenat "circulant":

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

(a) Demostreu que tota matriu circulant com l'anterior diagonalitza amb

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}$$

on $\alpha^3 = 1$, $\alpha \neq 1$. Calculeu-ne la forma diagonal.

(b) Demostreu que si A i B són circulants, també ho són $A + B$ i AB, i que els seus VAPS són respectivament la suma i el producte dels de A i B.

8.24. Sigui $A \in M_3(\mathbb{R})$ definida de la següent forma: $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

(a) Estudieu la diagonalització de A, i en els casos en que això sigui possible, determineu una matriu S tal que $S^{-1}AS = D$ sigui diagonal.

(b) Calculeu $A^p \quad \forall\, p \in \mathbb{Z}$.

Solució:

(a) La matriu A sempre diagonalitza. Una matriu diagonal D i una matriu de canvi de base S tals que $D = S^{-1}AS$ venen donades por

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} -a & -a^2 & a^2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $$A^p = SD^pS^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^p + \frac{1}{3}2^p & \frac{a}{3}\left(2^p - (-1)^p\right) & \frac{a^2}{3}\left(2^p - (-1)^p\right) \\ \frac{a^{-1}}{3}\left(2^p - (-1)^p\right) & \frac{2}{3}(-1)^p + \frac{1}{3}2^p & \frac{a}{3}\left(2^p - (-1)^p\right) \\ \frac{a^{-2}}{3}\left(2^p - (-1)^p\right) & \frac{a^{-1}}{3}\left(2^p - (-1)^p\right) & \frac{2}{3}(-1)^p + \frac{1}{3}2^p \end{pmatrix}.$$

8.25. (**) En el model d'elasticitat lineal per a petites pertorbacions, la deformació en un punt es representa per una matriu simètrica $[\varepsilon]$ (anomenada "tensor de deformacions") que dona per a cada vector la diferència amb la seva posició final. Se'n diuen "direccions principals de deformació" les que mantenen l'alineació, és a dir, que els seus vectors només pateixen allargament o escurçament.

(a) Justifiqueu que les direccions principals de deformació corresponen als vectors propis de $[\varepsilon]$, i que els seus valors propis donen els allargaments o escurçaments referits.

(b) Calculeu-les per a

$$[\varepsilon] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i verifiqueu que són perpendiculars entre elles.

De forma anàloga es considera el "tensor de tensions", $[\sigma]$, matriu simètrica que representa l'acció de les forces causants de la deformació. En el cas més freqüent de sòlids elàstics isòtrops (acer,...) es relacionen per les equacions constitutives de Hooke i de Lamé

$$[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E}[\sigma] - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\,[\sigma]\mathrm{Id}$$
$$[\sigma] = \frac{E}{1+\nu}[\varepsilon] + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\mathrm{tr}\,[\varepsilon]\mathrm{Id}$$

on E és el mòdul d'elasticitat de Young i ν el coeficient de Poisson ($-1 < \nu < \frac{1}{2}$).

(c) Calculeu, per a $\nu = \frac{1}{4}$, la matriu $[\sigma]$ corresponent a la considerada en (b), i verifiqueu que té els mateixos vectors propis.

(d) En general, demostreu que en les condicions anteriors les direccions principals de tensió i de deformació coincideixen.

(e) Demostreu igualment que

$$\mathrm{tr}\ [\sigma] = \frac{E}{1-2\nu}\mathrm{tr}\ [\varepsilon]$$

i que efectivament les equacions de Hooke i de Lamé són recíproques.

(f) Calculeu l'energia de la deformació

$$E^*_\varepsilon = \int \mathrm{tr}\ ([\sigma]\,[d\varepsilon])\,.$$

8.26. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ definit per

$$f(x,y,z,t) = (x - z + (a+2)t, y + z - 2t, 2z + (a-3)t, at)$$

(a) Calculeu la seva matriu en la base ordinària de $\mathbb{R}^4$.

(b) Determineu per a quins valors de a f és diagonalitzable.

Solució:

(a) La matriu de l'aplicació f en la base natural és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & a+2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(b) L'aplicació f diagonalitza si i només si $a \neq 1, 2$.

8.27. Trobeu les condicions que han de verificar a, b, c, d, e, f per a que la matriu real A sigui diagonalitzable, essent

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$. (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & d & e \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & f & 0 \end{pmatrix}$. (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & d & e \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & f & 3 \end{pmatrix}$.

Solució:

(a) La matriu diagonalitza si i només si $a = f = 0$.

(b) La matriu diagonalitza sempre.

(c) La matriu diagonalitza si i només si $bf + 2c = 0$.

8.28. Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per

$$f(x,y,z) = (\alpha x, -y + \beta z, 3x + \gamma z)$$

Per a quins valors de α, β, γ és f diagonalitzable?

Trobeu, quan f és diagonalitzable, els valors propis de f i una base de vectors propis.

Solució: Els VAPs de l'aplicació f són $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \gamma$ i $\lambda_3 = -1$. La coincidència de dos VAPs és el principal obstacle a la diagonalització de f.
En la següent taula es llisten els casos en què l'aplicació f diagonalitza, junt amb una base de VEPs per a cada cas.

Cas	Base de VEPs
$\alpha \neq -1 \neq \gamma$ i $\alpha \neq \gamma$	$v_1 = \left(\alpha - \gamma, \dfrac{3\beta}{\alpha+1}, 3\right)$, $v_2 = (0, \beta, \gamma+1)$ i $v_3 = (0,1,0)$
$\alpha = -1 \neq \gamma$ i $\beta = 0$	$v_1 = (\gamma+1, 0, -3)$, $v_2 = (0,0,1)$ i $v_3 = (0,1,0)$
$\alpha \neq -1 = \gamma$ i $\beta = 0$	$v_1 = (\alpha+1, 0, 3)$, $v_2 = (0,0,1)$ i $v_3 = (0,1,0)$

8.29. (a) Demostreu que l'endomorfisme de $M_2(\mathbb{R})$, $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$, definit per $f(A){=}A^t$ és diagonalitzable. Trobeu una base de vectors propis.

(b) Mateixes qüestions per l'endomorfisme de $M_2(\mathbb{R})$ definit per $g(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$.

Solució:

(a) El polinomi característic es $Q_f(t) = (t-1)^3(t+1)$ i $\dim \mathrm{Nuc}(f - \mathrm{Id}) = 3$. Per tant, l'aplicació f diagonalitza.

Una base de VEPs es $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

(b) El polinomi característic és $Q_f(t) = (t-1)^2(t+1)^2$, $\dim \mathrm{Nuc}(f - \mathrm{Id}) = 2$ i $\dim \mathrm{Nuc}(f + \mathrm{Id}) = 2$. Per tant, l'aplicació f diagonalitza.

Una base de VEPs és $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$.

8.30. (**opt.**) Interpreteu gràficament l'endomorfisme de $\mathbb{R}_1[t]$, la matriu del qual en la base natural és

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}.$$

8.31. (**opt.**) Considereu l'espai vectorial sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_2[x]$. Si $f \in End(\mathbb{R}_2[x])$ és tal que

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 - x^2 \\ f(x^2) &= 2x^2 - 1 \\ f(1+x) &= 2 + 2x - x^2 \end{aligned}$$

(a) Trobeu la matriu A de f en la base ordinària $(1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Doneu una base v de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que la matriu de f en aquesta base, D, sigui diagonal.

(c) Trobeu una matriu $B \in M_3(\mathbb{R})$ invertible tal que $BD = AB$.

Solució:

(a) La matriu de f en la base $(1, x, x^2)$ és $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Els VAPs de f són $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 3$. Una base de VEPs és $v = \big(1 + x^2, x, 1 - x^2\big)$.

(c) Una matriu diagonal D i un canvi de base B tals que $D = B^{-1}AB$ venen donats per

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8.32. Estudieu la diagonalització de la matriu real $A = \begin{pmatrix} 3a & -a & a & -a \\ a & a & a & -a \\ -a & a & a & a \\ a & -a & a & a \end{pmatrix}$ i, en cas que sigui diagonalitzable, determineu S tal que $S^{-1}AS$ sigui diagonal.

Solució: Suposarem que $a \neq 0$, ja que, altrament, $A = 0$ ja és diagonal.
La matriu A sempre diagonalitza. Una matriu diagonal D i una matriu de canvi de base S tals que $D = S^{-1}AS$ venen donades por

$$D = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.33. Sigui E un K-espai vectorial de dimensió finita, i f un endomorfisme de E, $P(f) = a_0 f^p + a_1 f^{p-1} + \cdots + a_p I$ on $a_i \in K$, $0 \leq i \leq p$.

(a) Trobeu la relació que hi ha entre els valors propis de f i de $P(f)$.

(b) Si f és invertible, trobeu la relació que hi ha entre els valors propis de f i de f^{-1}.

(c) Proveu que si f diagonalitza, $P(f)$ i f^{-1} (si f és invertible) també diagonalitzen. Trobeu la relació entre les respectives formes diagonals.

Solució:

(a) Si λ és un VAP de f, aleshores $P(\lambda)$ és un VAP de $P(f)$.

(b) Si λ és un VAP de f, aleshores λ^{-1} és un VAP de f^{-1}.

(c) Si D és una matriu diagonal de f, aleshores $P(D)$ i D^{-1} (si f és invertible) són matrius diagonals de $P(f)$ i f^{-1}, respectivament.

8.34. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ la matriu del qual en la base ordinària és

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Estudieu si f és diagonalitzable.

(b) Siguin F i G els subespais vectorials definits, respectivament, per $x-y+z=0$, $x-y+2z=0$. Proveu que F i G són invariants per f i estudieu si les restriccions $f_{|F}$ i $f_{|G}$ són diagonalitzables, donant, en el seu cas, la forma diagonal de la restricció corresponent.

Solució:

(a) El polinomi característic és $Q_f(t) = -t(t-1)^2$ i $\dim \mathrm{Nuc}(f - \mathrm{Id}) = 1$. Per tant, l'aplicació f no diagonalitza.

(b) Una base de F és la formada pels vectors $u_1 = (1,1,0)$ i $u_2 = (0,1,1)$. A més, $f(u_1) = u_1$ i $f(u_2) = u_2 - u_1$. Per tant, el subespai F és invariant. La restricció $f|_F$ no diagonalitza. Una base de G és la formada pels vectors $v_1 = (1,1,0)$ i $v_2 = (1,-1,-1)$. A més, $f(v_1) = v_1$ i $f(v_2) = 0$. Per tant, el subespai G és invariant, la restricció $f|_G$ diagonalitza i la seva matriu en la base $v = (v_1, v_2)$ és diagonal: $M_v(f|_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8.35. (**opt.**) Siguin $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $B \in M_m(\mathbb{R})$ diagonalitzables. Proveu que $AX - XB = 0$ té com a única solució la trivial si i només si A i B no tenen cap valor propi en comú.

Solució: És un problema teòric.

(8E) Matrius no diagonalitzables.

8.41. (*) Un sistema de control uniparamètric

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)\,, \qquad A \in M_n\,, \qquad b \in M_{n\times 1}$$

resulta "controlable" si té rang màxim la matriu de controlabilitat $K = (b,\, Ab,\, \dots,\, A^{n-1}b)$.

(a) Demostreu que si fem el canvi de base $\overline{x} = K^{-1}x$, resulta

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Verifiqueu que el polinomi característic és $Q(t) = t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \cdots - a_1 t - a_0$.

(c) Demostreu que per a qualsevol VAP λ és $\dim \mathrm{Nuc}\,(\overline{A} - \lambda I) = 1$.

(d) Deduïu que no diagonalitza si algun VAP és múltiple.

8.42. (*) En el model poblacional de Leslie, la transformació en cada període ve donada per una matriu de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

on α_i, β_i són respectivament els coeficients de la reproducció i de supervivència de la cohort i-èsima (en particular, $0 < \beta_i < 1$).

(a) Demostreu que per a cada VAP λ és

$$\dim \mathrm{Nuc}\,(A - \lambda I) = 1$$

i que per tant no diagonalitza si algun VAP és múltiple.

(b) Demostreu que A és equivalent a

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_1 & \overline{\alpha}_2 & \overline{\alpha}_3 & \dots & \overline{\alpha}_{n-1} & \overline{\alpha}_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on $\overline{\alpha}_1 = \alpha_1$, $\overline{\alpha}_2 = \beta_1\alpha_2$, $\overline{\alpha}_3 = \beta_1\beta_2\alpha_3$, ..., $\overline{\alpha}_n = \beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}\alpha_n$. Deduïu-ne el polinomi característic de A.

(8F) Càlcul matricial.

8.51. (a) Considereu la matriu $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(i) Demostreu que diagonalitza, i calculeu la seva forma diagonal D.

(ii) Determineu una matriu de canvi de base $S \in M_3(\mathbb{R})$, invertible, tal que $D = S^{-1}MS$.

(iii) Trobeu una matriu diagonal Y que verifiqui $Y^2 - DY + D^2 = 12I$.

(iv) Deduïu-ne una solució $X \in M_3(\mathbb{R})$ de l'equació matricial $X^2 - MX + M^2 = 12I$.

(b) Mateixes qüestions per la matriu $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 16 & 10 & -12 \\ 16 & 8 & -10 \end{pmatrix}$ substituint a (iii) i (iv) el coeficient 12 per 3.

Solució:

(a) (i) - (ii) Una matriu diagonal D i una matriu de canvi de base S tals que $D = S^{-1}MS$ venen donades per

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Las solucions diagonals de l'equació $Y^2 - DY + D^2 = 12\mathrm{Id}$ són

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Y_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iv) Si $X = SYS^{-1}$, aleshores $X^2 - MX + M^2 = 12\mathrm{Id} \Leftrightarrow Y^2 - DY + D^2 = 12\mathrm{Id}$.
Per tant, unes solucions de l'equació $X^2 - MX + M^2 = 12\mathrm{Id}$ són

$$X_1 = SY_1S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = SY_2S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) (i) - (ii) Una matriu diagonal D i una matriu de canvi de base S tals que $D = S^{-1}NS$ venen donades per

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) L'única solució diagonal de l'equació $Y^2 - DY + D^2 = 3\mathrm{Id}$ és

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iv) Si $X = SYS^{-1}$, aleshores $X^2 - NX + N^2 = 3\mathrm{Id} \Leftrightarrow Y^2 - DY + D^2 = 3\mathrm{Id}$.
Per tant, una solució de l'equació $X^2 - NX + N^2 = 3\mathrm{Id}$ és

$$X = SYS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & -6 \\ 8 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

8.52. Sigui $A \in M_2(\mathbb{C})$ no diagonalitzable i $\lambda \in \mathbb{C}$ el seu únic VAP

(a) Demostreu que si $v \notin \mathrm{Nuc}\,(A - \lambda I)$, aleshores és linealment independent amb $Av - \lambda v$.

(b) Aleshores sigui S la matriu de canvi a la base $(v,\, Av - \lambda v)$. Verifiqueu que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

(c) En particular, verifiqueu que per a $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ podem prendre $v = 2, 1$, i que resulta $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(d) Apliquem el resultat anterior per trobar totes les matrius B que $B^2 = A$.

Solució:

(c) $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d)
$$\begin{aligned} B^2 = A \quad &\Longleftrightarrow \quad (S^{-1}BS)^2 = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad S^{-1}BS) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad S^{-1}BS) = \pm \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1/4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per tant, $B = \pm S \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1/4 & 2 \end{pmatrix} S^{-1}$.

8.53. Sigui $A \in M_3(\mathbb{C})$ no diagonalitzable, amb polinomi característic $Q(t) = (t-\lambda)^2(t-\mu)$

(a) Demostreu que si v, w verifiquen:

$$v \in \text{Nuc } (A - \lambda I)^2 , \qquad v \notin \text{Nuc } (A - \lambda I) , \qquad w \in \text{Nuc } (A - \mu I)$$

aleshores són linealment independents: v , $Av - \lambda v$, w.

(b) Essent S la matriu de canvi a la base anterior, verifiqueu que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} .$$

(c) En particular, trobeu λ, μ i S per tal que

$$S^{-1} \begin{pmatrix} 16 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 13 & -25 & 3 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} .$$

(d) Apliqueu el resultat anterior per trobar B tal que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 13 & -25 & 3 \end{pmatrix} .$$

Solució:

(c) $\lambda = 16\,,\quad \mu = 3\,,\quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

(d) $B = S \left(\begin{array}{c|c} \pm\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1/8 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \quad 0 & \pm\sqrt{3} \end{array} \right) S^{-1}.$

8.54. (*) Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calculeu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per tal que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad \text{amb} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Apliqueu-ho per calcular A^k i e^A.

(c) Apliqueu-ho igualment per trobar B tal que $B^2 = A$.

Solució:

(a) $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3-3\alpha & 1 & 0 \\ 3-3\beta & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 2\,,\quad \beta = 1\,.$

(b) $A^k = S \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^k S^{-1} = S \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} S^{-1};\quad e^A = S \begin{pmatrix} e^4 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & e & e \end{pmatrix} S^{-1}.$

(c) $\overline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix},\quad \overline{B}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\gamma & 0 \end{pmatrix} = S^{-1}AS \Leftrightarrow \gamma = 1/2\,.$

Prenent $B = S\overline{B}S^{-1}$, amb $\gamma = \dfrac{1}{2}$: $\quad B^2 = (S\overline{B}S^{-1})^2 = S\overline{B}^2S^{-1} = SS^{-1}ASS^{-1} = A\,.$

(8G) El Teorema de Cayley-Hamilton. Polinomi anul.lador.

8.61. (*) Sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ les matrius d'un sitema de control. Utilitzeu el teorema de Cayley-Hamilton per demostrar que la matriu de controlabilitat pot truncar-se en la potència $n-1$, és a dir, que:

$$\text{rang}\,(B\ \ AB\ \ \ldots\ \ A^{n-1}B) = \text{rang}\,(B\ \ AB\ \ \ldots A^nB)\,.$$

8.62. Sigui $A \in M_3(\mathbb{R})$ definida de la següent forma: $A=\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \forall a \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Proveu que A és invertible i determineu A^{-1} fent servir el teorema de Cayley-Hamilton.

Solució: La matriu A és invertible, ja que $\det A = 2 \neq 0$. A més,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3\mathrm{Id}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ a^{-1} & -1 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & -1 \end{pmatrix}.$$

8.63. Sigui $A \in M_n(\mathbb{C})$ i el seu polinomi característic $Q(t) = (t-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (t-\lambda_r)^{\alpha_r}$. Demostreu que A diagonalitza si, i només si, el seu polinomi anul·lador és $P(t) = (t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_r)$.

8.64. (**opt.**) Trobeu els polinomis mínim i característic dels endomorfismes les matrius de les quals són:

(a) $\begin{pmatrix} 2 &&&&&& \\ 1 & 2 &&&&& \\ & 1 & 2 &&&& \\ &&& 2 &&& \\ &&& 1 & 2 && \\ &&&&& 2 & \\ &&&&& 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 &&&&&& \\ 1 & 2 &&&&& \\ & 1 & 2 &&&& \\ &&& 3 &&& \\ &&& 1 & 3 && \\ &&&&& 4 & \\ &&&&&& 5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} a &&&&&& \\ 1 & a &&&&& \\ & 1 & a &&&& \\ &&& a &&& \\ &&& 1 & a && \\ &&&&& a & \\ &&&&& 1 & a \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} a &&&&&& \\ 1 & a &&&&& \\ & 1 & a &&&& \\ &&& a &&& \\ &&&& a && \\ &&&&& a & \\ &&&&&& a \end{pmatrix}$

Solució:

(a) $Q(t) = -(t-2)^7$ i $P(t) = (t-2)^3$.
(b) $Q(t) = -P(t) = -(t-2)^3(t-3)^2(t-4)(t-5)$.
(c) $Q(t) = -(t-a)^7$ i $P(t) = (t-a)^3$.
(d) $Q(t) = -(t-a)^7$ i $P(t) = (t-a)^3$.

(8H) Miscel·lània.

8.71. Sigui $E = \mathbb{R}^4$ i sigui $g \in End(E)$, la matriu de la qual respecte de la base natural de $\mathbb{R}^4$ (e_1, e_2, e_3, e_4) és:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -9 & -1 & 15 \\ 2 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Proveu que $g^2 + g + I = 0$

(b) Proveu que $(e_1, g(e_1), e_3, g(e_3))$ és una base de $\mathbb{R}^4$. Quina és la matriu de g en aquesta nova base?

(c) Sigui $E_{e_1} = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid \text{existeix } Q(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ amb } Q(g)(e_1) = u\}$.

Proveu que és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensió dos. Doneu una base. (Indicació: utilitzeu (a)).

(d) És $g|E_{e_1}$ un endomorfisme de E ? En cas afirmatiu doneu la matriu de $g|E_{e_1}$ en la base donada en (c).

Solució:

(a) Basta comprovar que $M^2 + M + \mathrm{Id} = 0$.

(b) Si escrivim la nova com $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (e_1, g(e_1), e_3, g(e_3))$, veiem que

$$\begin{aligned} g(u_1) &= g(e_1) = u_2, \\ g(u_2) &= g^2(e_1) = -g(e_1) - e_1 = -u_1 - u_2, \\ g(u_3) &= g(e_3) = u_4, \\ g(u_4) &= g^2(e_3) = -g(e_3) - e_3 = -u_3 - u_4. \end{aligned}$$

Per tant, la matriu de g en la base u és $M_u(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Una base de E_{e_1} és $(u_1, u_2) = (e_1, g(e_1))$.

(d) Sí, g és un endomorfisme de E_{e_1}, ja que E_{e_1} és invariant per g.

La matriu de la restricció de g al subespai invariant E_{e_1} en la base (u_1, u_2) és la part superior esquerra de la matriu $M_u(g)$; és a dir, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

8.72. Demostreu que si $f \in \mathrm{End}E$ és diagonalitzable i $F \subset E$ n'és un subespai invariant, aleshores la restricció $f_{|_F}$ també és diagonalitzable.

8.73. Essent $f \in \mathrm{End}\ (E)$, suposem $f^2 = \alpha^2 \mathrm{Id}$, $f \neq \pm\alpha \mathrm{Id}$, $\alpha > 0$ (*)

(a) Demostreu que diagonalitza.

(b) Trobeu la seva forma diagonal, segons el valor de α i el de la traça, $\mathrm{tr} f$.

(c) Verifiqueu que $f \in \mathrm{End}\,(M_3(\mathbb{R}))$ definit per

$$f(M) = SMS\,, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

compleix les condicions (*).

(d) Determineu la seva matriu en la base ordinària.

(e) Trobeu-ne la seva matriu diagonal.

(f) Calculeu una base de VEP's.

Solució:

(a) $P(t) = t^2 - \alpha^2$.

(b) $Q(t) = (t-\alpha)^m (t+K)^{n-m}$

$\mathrm{tr}\ f = \alpha m + (-\alpha))(n-m) = 2m\alpha - n\alpha$.

$$m = \frac{n\alpha + \mathrm{tr}\ f}{2\alpha}; \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha & & & \\ \hline & & & -\alpha & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\alpha \end{array}\right).$$

$$\overleftrightarrow{\qquad m \qquad} \qquad \overleftrightarrow{\qquad n-m \qquad}$$

(c) $S^2 = \mathrm{Id}$, $\alpha = 1$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) $\alpha = 1,\ \ \mathrm{tr} f = 1 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$.

(f) $\mathrm{Nuc}\,(f-I) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$

$\mathrm{Nuc}\,(f+I) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$

8.74. (**opt.**) Trobeu la matriu en la base ordinària, de l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ tal que:

(a) $f(e_3) = 3f(e_2) - f(e_1)$.
(b) $f(e_1) - f(e_2) + 3f(e_3) = (-4, 10, 4)$.
(c) Els vectors de $F \cap G$, essent $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ i $G = [(1, 0, -1), (0, 1, 0)]$, són vectors propis de valor propi 1.

Solució: La matriu de l'aplicació en la base natural és $M_e(f) = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -3 & -7 \\ 15 & 10 & 15 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

8.75. (**opt.**) Trobeu la matriu en la base ordinària, de l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ tal que:

(a) $f(e_1) + f(e_3) = e_1 + e_3$.
(b) $f(e_1) + f(e_2) = e_1 + e_2$.
(c) Els vectors $F \cap G$, essent $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, 2x - y - z = 0\}$ i $G = [(2, 0, 3), (1, 0, 1)]$, són vectors propis de valor propi -1.

Solució: La matriu de l'aplicació en la base natural és $M_e(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

8.76. (**opt.**) Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ tal que:

(1) $f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (1, 1, 1)$.
(2) $f(e_1) - f(e_2) = f(1, 1, -2)$.
(3) $f^2 = f$.
(4) Si $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 2z = 0\}$ i $H = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)]$, llavors $F \cap H$ és invariant per f.

Trobeu les possibles formes reduïdes de Jordan de f.

Solució: Hi ha dues possibilitats: $J = \mathrm{diag}(1, 1, 0)$ i $J' = \mathrm{diag}(1, 0, 0)$.

En el primer cas, la matriu de f en la base natural és $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

En el segon cas, la matriu de f en la base natural és $A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.77. (**opt.**) Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ tal que:

(1) $f(0,1,0,0) = (0,1/2,1/2,1)$.

(2) És equivalent a l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ la matriu del qual en base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & 14 & 7 \\ -1 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Deixa invariants els subespais

$$F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$
$$G = [(-3,-2,3,2),(-1,0,1,0)].$$

(4) Els seus vectors propis pertanyen al subespai

$$H = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Trobeu la matriu de f en la base canònica.

Solució: Una forma de Jordan de la matriu A és $J = \mathrm{diag}(J_2(2), J_2(2)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Una base de Jordan de l'aplicació f és $u = (u_1,u_2,u_3,u_4)$, on

$$u_1 = (2,1,0,-1), \quad u_2 = (0,-1,1,0), \quad u_3 = (1,0,-1,0), \quad u_4 = (0,1,0,-1).$$

En esta base la matriu de l'aplicació és l'anterior forma de Jordan: $M_u(f) = J$. Per tant, la matriu de l'aplicació f en la base natural e de $\mathbb{R}^4$ és

$$M_e(f) = SM_u(f)S^{-1} = SJS^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

on S és la matriu del canvi de base de u a e.

9. Equacions en diferències i sistemes dinàmics discrets lineals

(9A) Equacions en diferències finites lineals.

9.1. Trobeu la solució de l'equació de Fibonacci $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$; $\quad F_0 = 0\,, \quad F_1 = 1\,.$

Solució: Equació característica: $t^2 - t - 1 = 0\,.$

Valors característics: $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$

Solució general: $F_k = c_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + c_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$

Condicions inicials: $\left.\begin{array}{l} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{array}.$

Solució: $F_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right).$

9.2. Resoleu les equacions en diferències següents:

(a) $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 0; \quad y(0) = 0\,, \quad y(1) = 1\,.$
(b) $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 0; \quad y(0) = y(1) = 1\,.$
(c) $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 0; \quad y(0) = \alpha\,, \quad y(1) = \alpha + \beta\,.$
(d) $y(k+2) - 2y(k+1) + 2y(k) = 0; \quad y(0) = 1\,, \quad y(1) = 3\,.$

Solució:

(a) $y(k) = -2^k + 3^k\,.$
(b) $y(k) = 2^{k+1} - 3^k\,.$
(c) $y(k) = \alpha - \beta + \beta 2^k\,.$
(d) $y(k) = \underset{\frac{1-2i}{2}}{\underset{\Vert}{c_1}} (1+i)^k + \underset{\frac{1+2i}{2}}{\underset{\Vert}{c_2}} (1-i)^k = \sqrt{2}^k \cos\dfrac{\pi}{4}k + 2\sqrt{2}^k \sin\dfrac{\pi}{4}k.$

9.3. Resoleu les equacions en diferències següents:

(a) $y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k) = 0; \quad y(0) = 1\,, \quad y(1) = 2\,, \quad y(2) = 5\,.$
(b) $y(k+3) - y(k+2) - 8y(k+1) + 12y(k) = 0; \quad y(0) = 3\,, \quad y(1) = -1\,, \quad y(2) = 9\,.$

Solució:

(a) $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3 = 0$

$y(k) = c_1 + c_2k + c_3k^2$

$c_1 = 1\,,\quad c_2 = 1\,,\quad c_3 = 2 \Rightarrow y(k) = 1 - k + 2k^2$

(b) $t^3 - t^2 - 8t + 12 = (t-2)^2(t+3)$

$$\left.\begin{array}{l} y(k) = c_1 2^k + c_2 k 2^k + c_3(-3)^k \\ c_1 = 2,\quad c_2 = -1,\quad c_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y(k) = 2^{k+1} - k2^k + (-3)^k\,.$$

9.4. Determineu la solució general de les equacions en diferències següents:

(a) $y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2\,.$

(b) $y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) = 12k\,.$

(c) $y(k+3) - 3y(k+1) + 3y(k+1) + y(k) = \cos(2k)\,.$

(d) $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 3^k\,.$

9.5. **(opt.)** Resoleu l'equació en diferències

$$y(k+1) - 5y(k) = 1$$

i deduïu-ne una solució per a l'equació en diferències no lineal

$$z(k+1) = \frac{z(k)}{5 + z(k)}\,.$$

9.6. Proveu que les solucions de

$$y(k+2) - y(k+1) + \frac{1}{4}y(k) = 2$$

tenen com a límit el punt d'equilibri, calculant-les prèviament.

9.7. Determineu quines de les solucions de l'equació

$$y(k+3) - \frac{1}{2}y(k+2) - 4y(k+1) + 2y(k) = 4$$

tenen com a límit el punt d'equilibri.

9.8. (*) (*Joc de la ruleta.*) Es tracta de calcular la probabilitat que un jugador de ruleta faci saltar la banca. Suposarem que inicialment el jugador té A fitxes i la banca en té B, i que el jugador es juga una fitxa a cada tirada. Designem per p la probabilitat de que el jugador guanyi la fitxa, per q la probabilitat de que perdi la fitxa i per $u(k)$ la probabilitat de fer saltar la banca quan el jugador té k fitxes.

(a) Justifiqueu que

$$u(k)Ppu(k+1) + qu(k-1)\,,\qquad u(0) = 0\,,\quad u(A+B) = 1$$

i determineu la solució d'aquesta equació.

(b) Determineu l'equació en diferències i la solució de la mateixa en el cas de jugar a color en una ruleta de 37 caselles.

(c) Trobeu l'equació en diferències que satisfà $u(k)$, i determineu la seva solució, en el cas de la ruleta de Montecarlo, en què si surt el "0" la fitxa es reté, podent el jugador guanyar-la o perdre-la en la tirada següent (també pot continuar estant retinguda) sense que en cap cas en pugui guanyar una d'addicional.

(d) Compareu les probalitats de fer saltar la banca en el cas de jugar a color en la ruleta tradicional i en la de Montecarlo.

9.9. (*) (*Equació dels tres moments.*) L'anàlisi de les bigues requereix l'avaluació dels moments que actuen en els suports. Aquests moments satisfan l'anomenada "equació dels tres moments", que és la relació entre els moments que actuen en tres suports consecutius.
Una biga en voladís es recolza en N suports separats un de l'altre 3 m, i una càrrega de 227 Kg actua a l'extrem de la biga a 3 m del primer suport. Sigui $M(k)$ el moment en el suport k-èsim. Per tant, $M(0) = 681$ Kg m. Suposem que la biga està rígidament fixada en el suport $N-1$, amb la qual cosa $M(N-1) = 0$. Es satisfà l'equació dels tres moments.:

$$M(k+2) + 4M(k+1) + M(k) = 0\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-3 \tag{$*$}$$

(a) Determineu la solució general de l'equació en diferències (*).

(b) Trobeu la solució particular de (*) que satisfà les condicions de frontera $M(0) = 681$, $M(N-1) = 0$ (la solució inclou N).

(c) Suposem ara que perllonguem la biga fins a l'infinit per la dreta (és a dir, $N \to \infty$). Trobeu la solució particular de (*) que satisfà les condicions de frontera $M(0) = 681$, $M(\infty) = 0$.

9.10. (**) (*Voltatge en una cadena d'aïllants elèctrics.*) Suposem que tenim una "filera d'aïllants", formada per $n-1$ aïllants idèntics que estan connectats per conductors metàl.lics també idèntics. El primer aïllant està connectat a terra per la unió amb la torre, l'últim està connectat a la línia de conducció, la qual porta un corrent altern de freqüència ω. Considerem ara un conductor metàl.lic qualsevol entre dos aïllants. Si denotem el voltatge del conductor k per V_k, el corrent entre el conductor $k-1$ i el conductor k és $I_k = i\omega C_1(V_{k-1} - V_k)$; entre el conductor k i el terra és $i_k = -i\omega C_2 V_k$, on C_1 és la capacitat entre dos conductors continguts i C_2 és la capacitat d'un conductor respecte al terra. Es veu que $I_{k+1} = I_k + i_k$ i, per tant,

$$C_1(V_{k+1} - V_k) - C_1(V_k - V_{k-1}) - C_2 V_k = 0\,.$$

Les condicions de frontera són $V_0 = 0$ i $V_n = U$, essent U el voltatge de la línia de conducció.

(a) Trobeu la distribució del voltatge al llarg de la cadena.

(b) Interpreteu el resultat obtingut.

9.11. (*) (*Teoria de la informació.*) Imagineu un sistema de transmissió d'informació que usa un alfabet format només de dos símbols: el punt i el guió. Els missatges es transmeten mitjançant una prèvia codificació en una "corda" d'aquests símbols.
Cada símbol requereix un cert temps per a la seva transmissió, de manera que en un temps fixat només determinades cordes poden ésser transmeses: indiquem per N_t el nombre de cordes

diferents que poden ser transmeses en un temps t. Shannon defineix la "capacitat" C de un sistema de transmissió (mesurat en bits per unitat de temps) mitjançant

$$C = \lim_{t\to\infty} \frac{\log_2 N_t}{t}.$$

(a) Suposeu un sistema en el qual tant el punt com el guió requereixen una sola unitat de temps per a ésser transmesos. Verifiqueu que $N_t = 2^t$ i per tant $C = 1$.

(b) Suposeu ara que el punt requereix una unitat de temps, mentre que el guió en requereix dues.

(i) Quins són els valors de N_1 i N_2? (Recordeu que només són permesos el punt i el guió; el "blanc" no és permès).

(ii) Justifiqueu l'equació $N_t = N_{t-1} + N_{t-2}$.

(iii) (**) Calculeu la capacitat d'aquest sistema. (*Nota:* utilitzeu els números de Fibonacci.)

9.12. (*) (Teoria de cues.) Un petit taller treballa sota comanda, i serveix mantenint l'ordre de recepció de les comandes. Suposeu que en una hora hi ha una probabilitat p (molt petita) de rebre una comanda, i que pràcticament mai no en rep dues. Suposeu igualment que hi ha probabilitat q (també molt petita, però major que p) de que una comanda en realització sigui completada en el termini d'una hora, i que pràcticament mai no es completen dues comandes dins la mateixa hora. Es tracta de calcular, en mitjana, quantes comandes estaran en cua d'espera, pendents de completar.
Per a això, designeu per $u(n)$ la probabilitat de que la cua sigui n.

(a) Justifiqueu les relacions:

(i) $u(n) = p\,u(n-1) + q\,u(n+1) + (1-p-q)u(n), \quad n > 0$.

(ii) $u(0) = q\,u(1) + (1-p)u(0)$.

(iii) $\Sigma u(n) = 1$.

(b) Calculeu $u(n)$.

(c) Calculeu $u(0)$.

(d) Justifiqueu que la mitjana demanada és $\Sigma n\,u(n)$, i calculeu-la.

(e) Deduïu quina és la mitjana mínima compatible amb $u(0) < 0'1$.

(9B) Sistemes dinàmics discrets lineals.

9.21. Considereu el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{3}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) + 1 \\ x_2(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) - 1 \\ x_3(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{3}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) + 2 \\ x_4(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{3}x_4(k) - 1 \end{cases}$$

(a) Trobeu-ne una solució particular.

(b) Doneu la solució general del sistema.

9.22. Resoleu el sistema següent:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \dfrac{1}{3}x_2(k) + \dfrac{1}{4}x_3(k) \\ x_2(k+1) = \dfrac{2}{3}x_2(k) + \dfrac{1}{4}x_3(k) + 500 \\ x_3(k+1) = \dfrac{1}{2}x_3(k) + \dfrac{1}{4}x_4(k) \\ x_4(k+1) = \dfrac{3}{4}x_4(k) + 1000 \end{cases}$$

9.23. Trobeu el conjunt de solucions del sistema

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + 1 \end{cases}$$

9.24. Estudieu l'existència de punts d'equilibri i de solucions fitades per al sistema

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -3x_1(k) - 2x_2(k) \\ x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

9.25. Considereu el sistema d'equacions en diferències:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \dfrac{1}{2}x_1(k) + \dfrac{1}{4}x_2(k) + \dfrac{1}{4}x_3(k) \\ x_2(k+1) = \dfrac{1}{4}x_1(k) + \dfrac{1}{2}x_2(k) + \dfrac{1}{4}x_3(k) \\ x_3(k+1) = \dfrac{1}{4}x_1(k) + \dfrac{1}{4}x_2(k) + \dfrac{1}{2}x_3(k) \end{cases}$$

Indiqueu quines són les solucions del sistema que són

(a) Convergents a l'origen.

(b) Convergents a algun altre punt d'equilibri.

(c) Fitades, però no convergents.

(d) No acotades.

9.26. Determineu els modes propis i els modes dominants per al sistema d'equacions en diferències:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \dfrac{1}{4}x_1(k) + \dfrac{1}{3}x_2(k) + \dfrac{1}{3}x_3(k) \\ x_2(k+1) = \dfrac{1}{3}x_1(k) + \dfrac{1}{4}x_2(k) + \dfrac{1}{3}x_3(k) \\ x_3(k+1) = \dfrac{1}{3}x_1(k) + \dfrac{1}{3}x_2(k) + \dfrac{1}{4}x_3(k) \end{cases}$$

9.27. (*) En l'estudi de Lamberson (1992) sobre la supervivència del mussol americà, va obtenir experimentalment que:

$$\begin{pmatrix} J_{k+1} \\ S_{k+1} \\ A_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} J_k \\ S_k \\ A_k \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0'33 \\ 0'18 & 0 & 0 \\ 0 & 0'71 & 0'94 \end{pmatrix},$$

on J_k, S_k i A_k indica la població "jove" (fins a 1 any), "subadulta" (entre 1 i 2 anys) i "adulta", respectivament, l'any k.

(a) Verifiqueu que els valors propis de la matriu A obtinguda són aproximadament: $0'98$, $-0'02 \pm 0'21i$.

(b) Deduïu que en aquestes condicions, l'espècie tendeix a l'extinció.

(c) Verifiqueu que si l'índex anual de supervivència dels joves fos del 30% en lloc del 18%, aleshores els valors propis resultarien: $1'01$, $-0'03 \pm 0'26i$. Deduïu igualment que aleshores la població tendiria a augmentar.
(*Nota:* l'índex de supervivència referit és efectivament millorable mitjançant polítiques forestals adients.)

(d) Calculeu quin és el mínim índex anual de supervivència dels joves, per tal d'evitar l'extinció.

(e) En les condicions de (c), calculeu la distribució poblacional entre joves, subadults i adults a la qual s'hi tendiria.

9.28. (*) Considereu el model simplificat pressa / depredador

$$\begin{pmatrix} D_{k+1} \\ P_{k+1} \end{pmatrix} = A_\alpha \begin{pmatrix} D_k \\ P_k \end{pmatrix}, \qquad A_\alpha = \begin{pmatrix} 0'5 & 0'4 \\ -\alpha & 1'1 \end{pmatrix},$$

on P_k i D_k indiquen respectivament la població de preses i de depredadors en l'etapa k.

(a) Demostreu que els valors propis de la matriu A_α són menors que 1 si, i només si, $\alpha > 0'125$.

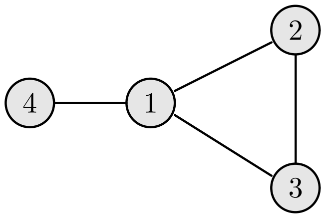
(b) Justifiqueu que aleshores ambdues espècies tendeixen a l'extinció.

(c) Justifiqueu anàlogament que per a $\alpha < 0'125$ les poblacions tendeixen a augmentar i que per a $\alpha = 0'125$, a estabilitzar-se.

(d) Calculeu la distribució de la població a la qual es tendeix per a $\alpha = 0'125$ i $\alpha = 0'104$. Interpreteu el resultat.

9.29. (**) Els "índex d'accessibilitat de Gould" han estat utilitzats en diversos problemes geogràfics, com ara xarxes de transport o moviments migratoris. Per a la seva determinació es configura una xarxa (o graf) representant les ciutats (o altres entitats geogràficament significatives) i les connexions entre elles.

Per exemple:



Suposant numerats els nusos o vèrtex ($i = 1, \ldots, n$), se’n diu la seva matriu d’adjacència (modificada) la matriu simètrica $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ definida per: $a_{ii} = 1$; $a_{ij} = 1$ ó 0, segons els vèrtex corresponents estiguin o no connectats per un arc. Així, per al graf anterior seria:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es demostra que el seu valor propi més gran és positiu i simple, i que podem prendre com base del seu 1-subespai propi un vector de coordenades positives, que sumin 1. Aquestes coordenades es diuen els índex d’accessibilitat de Gould dels vèrtex corresponents.

(a) Calculeu els índex d’accessibilitat de Gould per als vèrtex dels graf anterior

(b) Analitzeu si el resultat obtingut s’adiu amb la idea intuïtiva d’”accessibilitat” de cada vèrtex.

Suposem que inicialment en cada vèrtex hi ha un cert nombre (no nul) d’objectes $x_1(0), \ldots, x_n(0)$, i que en cada unitat de temps cada objecte crea una seva rèplica en cadascun dels vèrtexs adjacents. Designem per $x_1(k), \ldots, x_n(k)$ els objectes que, en el vèrtex corresponent, hi ha en l’instant k. Per exemple, seqüències possibles en l’exemple anterior serien:

$$\begin{gathered} (1,1,1,1),(4,3,3,2),(12,10,10,6),(38,32,32,18),\ldots \\ (1,2,3,4),(10,6,6,5),(27,22,22,15),(86,71,71,42),\ldots \\ (4,3,2,1),(10,9.9,5),(33,28,28,15),(104,89,89,48),\ldots \end{gathered}$$

(c) Raoneu que, per a l’exemple anterior, la relació entre les situacions als instant k i $k+1$ ve donada per:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + x_4(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \\ x_3(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \\ x_4(k+1) &= x_1(k) + x_4(k) \end{aligned}$$

(d) Demostreu que, asimptòticament, el percentatge d’objectes en cada vèrtex ve donat pels índex d’accessibilitat de Gould, amb independència de la situació inicial.

(e) Calculeu, en les seqüències anteriors, el percentatge d’objectes en cada vèrtex per a $k = 3$ i compareu-los amb els índex obtinguts en (a).

(f) Raoneu que en un graf qualsevol les equacions de (c) resulten $x(k+1) = Ax(k)$ i deduïu que la conclusió de (d) es generalitza a tots els grafs.

9.30. (*) En models de la forma $x(k+1) = A\,x(k)$ sovint es requereix la condició

$$x_1(k) + \cdots + x_n(k) = \text{ct.} \quad (= x_1(0) + \cdots + x_n(0))$$

(a) Demostreu que una condició necessària i suficient a tal efecte és: la suma dels coeficients de cada columna de A és 1.

(b) Demostreu que aleshores 1 sempre és un VAP. Trobeu-ne un VEP.

(c) Demostreu que $v = (v_1, \dots, v_n)$ és un VEP d'un VAP $\lambda \neq 1$, aleshores $v_1 + \cdots + v_n = 0$.

(d) Deduïu que els únics VEPS amb coordenades totes positives són els del VAP $\lambda = 1$.

9.31. (*) (*Epidèmia.*) Una epidèmia afecta el 10% de la població encara sana cada mes i, dels que estan malalts, es posen bons un 80%, mentre que el 20% restant moren. Determineu l'estat estacionari de la malaltia.

9.32. (*) (*Central d'autobusos.*) Considerem una companyia d'autobusos, amb centrals a quatre ciutats A, B, C i D. Cada setmana el moviment d'autobusos és el següent:

- Dels que hi ha a cadascuna de les centrals A i B, un terç se'n va cap a C, un terç cap a D, i l'altre terç roman a la pròpia central.
- Dels que hi ha a cadascuna de les centrals C i D, se'n va un terç cap a casascuna de les altres tres centrals.

(a) Denotem per $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$, $d(k)$ el nombre d'autobusos a les centrals A, B, C i D, respectivament, en la setmana k. Deduïu $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$ i $d(k)$ a partir de les condicions inicials $a(0)$, $b(0)$, $c(0)$ i $d(0)$.

(b) Calculeu:
- $a(k) + b(k) + c(k) + d(k)$, per a $k = 1, 2, \dots$.
- $\lim(a(k), b(k), c(k), d(k))$

i interpreteu aquests resultats.

9.33. (*) (*Connexió en cascada de quadripols asimètrics.*) Considerem un circuït elèctric que consisteix en una cadena de n quadripols idèntics connectats, cadascun d'ells amb dues entrades i dues sortides. Posem I_k, I_{k+1} a les intensitats d'entrada i de sortida del quadripol que ocupa la posició k, i designem per E_k, E_{k+1} els potencials induïts per forces externes, sobre el mateix quadripol. Les lleis de Kirchhoff ens donen les relacions següents: $I_k = I_{k+1}$ i $E_k = E_{k+1} + CI_{k+1}$. Determineu, per a un quadripol qualsevol, la seva intensitat d'entrada i el potencial a partir de I_1 i E_1.

9.34. (*) (*Evolució del mercat.*) Tres marques A, B i C competeixen oferint un mateix producte. Suposarem que un client genèric no compra mai dos cops consecutius el mateix producte. Si el primer dia compra el producte de la marca A, el segon dia compra la marca B. Si en canvi ha comprat la marca B o C el primer dia, pot ser que el segon dia compri qualsevol de les altres dues marques, però la probabilitat de que compri la marca A és doble que la probabilitat de que compri l'altra marca. Estudeu quina és a la llarga la probabilitat de que compri cadascuna de les tres marques.

9.35. (*) (*Probabilitats.*) Suposem que tenim dues urnes, la primera amb dues boles blanques i la segona amb tres boles negres. A cada pas, procedim extraient una bola a l'atzar de cada una i intercanviant les dues boles extretes. Proveu que la probabilitat de que a la llarga a la urna primera hi hagi dues boles negres és la mateixa que si tinguéssim les cinc boles i calculéssim la probabilitat d'extreure dues boles negres per a col.locar-les a la primera urna.

10. EDO's lineals i sistemes lineals a coeficients constants

(10A) EDO's lineals amb coeficients constants.

10.1. Resoleu:

(a) $y''' - 8y = 0$.

(b) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$.

(c) $y^{(8)} - y = 0$.

Solució:

(a) $y_{\mathrm{h}}(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-t}\big(c_2 \cos(\sqrt{3}t) + c_3 \sin(\sqrt{3}t)\big)$.

(b) $y_{\mathrm{h}}(t) = c_1 + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t) + c_4 t \cos(2t) + c_5 t \sin(2t)$.

(c) $y_{\mathrm{h}}(t) = c_1 \mathrm{e}^{t} + c_2 \mathrm{e}^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t +$
$\mathrm{e}^{t/\sqrt{2}}\big(c_5 \cos(t/\sqrt{2}) + c_6 \sin(t/\sqrt{2})\big) + \mathrm{e}^{-t/\sqrt{2}}\big(c_7 \cos(t/\sqrt{2}) + c_8 \sin(t/\sqrt{2})\big)$.

10.2. Resoleu:

(a) $2y'' + 2y' + 3y = t^2 + 2t + 1$.

(b) $y'' + 3y' - 4y = \sin 2t$.

(c) $y'' + 4y = \sin 2t$.

(d) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^{4t}$.

(e) $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 13\mathrm{e}^{-2t}$.

(f) $y''' - 2y'' - y' + 2y = \cos t$.

(g) $y''' - y' = t\mathrm{e}^{t}$.

Solució:

(a) $y_{\mathrm{g}}(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\big(c_1 \cos(\sqrt{5}t/2) + c_2 \sin(\sqrt{5}t/2)\big) - \frac{7}{27} + \frac{2}{9}t + \frac{1}{3}t^2$.

(b) $y_{\mathrm{g}}(t) = c_1 \mathrm{e}^{t} + c_2 \mathrm{e}^{-4t} - \frac{3}{50}\cos 2t - \frac{2}{25}\sin 2t$.

(c) $y_{\mathrm{g}}(t) = (c_1 - t/4)\cos 2t + c_2 \sin 2t$.

(d) $y_{\mathrm{g}}(t) = c_1 \mathrm{e}^{t} + c_2 \mathrm{e}^{3t} + c_3 \mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{18}\mathrm{e}^{4t}$.

(e) $y_{\mathrm{g}}(t) = (c_1 + t)\mathrm{e}^{-2t} + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t$.

(f) $y_{\mathrm{g}}(t) = c_1 \mathrm{e}^{t} + c_2 \mathrm{e}^{-t} + c_3 \mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{5}\cos t - \frac{1}{10}\sin t$.

(g) $y_{\mathrm{g}}(t) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{t} + c_3 \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{t}(t^2 - 3t)/4$.

10.3. Resoleu:

(a) $y''' - 4y' = \cos^2 t,\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$.

(b) $y'' + 2y' + y = t\mathrm{e}^{-t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Solució:

(a) $y(t) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{8}t + \frac{11}{64}\mathrm{e}^{2t} + \frac{5}{64}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{32}\sin 2t$. Hemos usado que $2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$.

(b) $y(t) = \mathrm{e}^{-t}(1 + 3t + t^3/6)$.

10.4. Usar el comando `dsolve` de MATLAB para resolver simbólicamente los problemas:

(a) $y''' - y'' + y' - y = t\mathrm{e}^t \sin t$.

(b) $2y^{(5)} - 7y^{(4)} + 12y''' + 8y'' = 0,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = y^{(4)}(0) = 1$.

(a) *El comando* `dsolve('D3y-D2y+Dy-y=t*eyp(t)*sin(t)')` *da la solución general*

$$y_{\mathrm{g}}(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2\cos t + c_3\sin t - \mathrm{e}^t\left(8\cos t + 5t\cos t - 19\sin t + 10t\sin t\right)/25.$$

(b) *Obtenemos la solución* $y(t) = 19/16 - 5t/8 - 48\mathrm{e}^{-t/2}/41 + \mathrm{e}^{2t}\big(24\sin(2t) - 11\cos(2t)\big)/656$ *con los comandos*

```
>> edo='2*D5y-7*D4y+12*D3y+8*D2y=0';
>> ci='y(0)=0,Dy(0)=0,D2y(0)=0,D3y(0)=1,D4y(0)=1';
>> dsolve(edo,ci)
```

10.5. Tenemos una EDO lineal homogénea a coeficientes constantes cuyo polinomio característico es $P(m) = (m^2 - 4)(m^2 + 9)(m^2 + 2m + 2)m$.

(a) ¿De qué dimensión es el subespacio vectorial formado por todas sus soluciones? Escribir la solución general de la ecuación.

(b) ¿De qué dimensión es el subespacio vectorial formado por todas sus soluciones periódicas? ¿Qué periodo tienen?

(c) ¿De qué dimensión es el subespacio vectorial formado por todas las soluciones que tienden a cero cuando $t \to +\infty$? ¿Y cuando $t \to -\infty$? ¿Y cuando $t \to \pm\infty$?

Solució: La EDO tiene orden siete, pues $\mathrm{gr}[P(m)] = 7$.

(a) Siete. $y_{\mathrm{g}}(t) = c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^{-2t} + c_3\cos(3t) + c_4\sin(3t) + \mathrm{e}^{-t}(c_5\cos t + c_6\sin t) + c_7$.

(b) Tres, pues necesitamos que $c_1 = c_2 = c_5 = c_6 = 0$. El periodo es $T = 2\pi/3$.

(c) Tres, pues necesitamos que $c_1 = c_3 = c_4 = c_7 = 0$. Uno, pues c_1 es la única constante que puede ser no nula. Cero, pues todas las constantes deben ser nulas.

10.6. Probar que la EDO $y''' - y = \cos t$ tiene una única solución periódica. Calcularla.

Solució: La solución general de la EDO es

$$y_{\mathrm{g}}(t) = y_{\mathrm{h}}(t) + y_{\mathrm{p}}(t) = c_1\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t/2}\big(c_2\cos\sqrt{3}t/2 + c_3\sin\sqrt{3}t/2\big) - (\cos t + \sin t)/2.$$

Tomando $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, queda que $y(t) = -(\cos t + \sin t)/2$ es la única solución periódica.

10.7. (**opt.**) Consideramos la EDO lineal no homogénea $y^{(4)} - y = 45\sin(2t)$.

(a) Calcular su solución general.

(b) Si $y(t)$ es su solución determinada por las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$, ¿cuál es el menor valor de $n \geq 4$ tal que $y^{(n)}(0) \neq 0$? ¿Qué valor tiene esa primera derivada no nula?

(c) Calcular todas sus soluciones periódicas. ¿Tienen el mismo periodo? En caso afirmativo, dar el periodo común. En caso negativo, dar el periodo de cada solución.

Solució:

(a) $y_{\mathrm{g}}(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t + 3\sin(2t)$, con $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ libres.

(b) $y^{(4)}(t) = 45\sin(2t) + y(t)$, luego $y^{(4)}(0) = 0 + y(0) = 0$. Derivando la expresión anterior, vemos que $y^{(5)}(t) = 90\cos(2t) + y'(t)$, luego $y^{(5)}(0) = 90 + y'(0) = 90 \neq 0$.

(c) Las frecuencias $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = 2$ son resonantes, luego tomando $c_1 = c_2 = 0$, queda $y(t) = c_3 \cos t + c_4 \sin t + 3\sin(2t)$, con $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ libres. que son todas las soluciones periódicas de la EDO. La solución particular $y_{\mathrm{p}}(t) = 3\sin(2t)$ tiene periodo $T_2 = 2\pi/\omega_2 = \pi$, todas las demás tienen periodo $T = \text{m.c.m.}[2\pi/\omega_1, 2\pi/\omega_2] = \text{m.c.m.}[2\pi, \pi] = 2\pi$.

10.8. (*) (Desintegración radioactiva) La desintegración de una partícula inestable (esto es, radioactiva) es un proceso aleatorio que no puede ser predecido, pero se sabe que esta desintegración es igualmente probable en todos los instantes. Por tanto, dada una muestra de un isótopo radioactivo, el número de desintegraciones en un momento dado es proporcional al número de átomos radioactivos existentes en ese momento.

Sea λ la constante de proporcionalidad, que recibe el nombre de *constante de desintegración*. Plantear la ecuación que cumple el número de átomos $N(t)$.

La *semivida* $t_{1/2}$ es el tiempo que debe transcurrir para que se desintegren la mitad de los átomos iniciales. Relacionar $t_{1/2}$ y λ.

En el enlace `http://www.walter-fendt.de/ph14s/lawdecay_s.htm` se puede visualizar este fenómeno mediante un applet de JAVA.

Solució: La ecuación es $N' = -\lambda N$ y su solución general es $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$, siendo N_0 el número de átomos iniciales. Las relación es $\lambda t_{1/2} = \ln 2$.

10.9. (*) (Datación por Carbono-14) Una muestra de carbón de la cueva de Lascaux daba, en 1950, una media de 0.97 desintegraciones de ^{14}C por minuto y gramo, mientras que en árboles vivos suele ser de 6.68. Estimar la fecha en que se hicieron las pinturas rupestres de Lascaux. La semivida del ^{14}C es (aproximadamente) de 5730$\pm$40 años.

Solució: La fecha aproximada es $5730(\ln 6.68 - \ln 0.97)/\ln 2 = 15951$ años antes de 1950. Es decir, unos 14000 años A.C.

10.10. (*) (Airbus A380) El avión de transporte de pasajeros Airbus A380 tiene un peso en vacío de 276.8 toneladas, su carga típica es de 66.4 toneladas y puede despegar con hasta 248 toneladas de combustible. Cuando alcanza su velocidad de crucero (900 kilómetros por hora), consume 28 kilogramos de combustible por tonelada de peso y hora. Suponiendo que siempre debe quedar una reserva de 30 toneladas de combustible para el despegue, aterrizaje y por seguridad, ¿cuál es su rango de vuelo máximo con la carga típica?

Solució: Sea $P_0 = 276.8 + 66.4 = 343.2$ el peso en vacío más la carga típica y $c_0 = 248$. Sean $c(t)$ y $P(t) = P_0 + c(t)$ el peso del combustible y el peso del avión en el instante t. Entonces, $P' = -0.028P$, luego $P(t) = P(0)\mathrm{e}^{-0.028t}$ y así $c(t) = P(t) - P_0 = (P_0 + c_0)\mathrm{e}^{-0.028t} - P_0$. Finalmente, la solución de la ecuación $c(t_*) = 30$ es $t_* \simeq 16.43$ horas y el rango de vuelo es $r_* = 900t_* \simeq 14787$ kilómetros.

10.11. (*) (Modelo de Malthus) Sea $x(t)$ el tamaño de una población aislada que dispone de recursos y alimento ilimitados. El modelo de Malthus consiste en suponer que el ritmo de crecimiento de la población es, en cada instante, proporcional al tamaño de la población. Sea $k > 0$ la constante de proporcionalidad. Escribir y resolver la ecuación diferencial resultante.

Supongamos que $x(1800) = 0.978 \times 10^9$ y $x(1900) = 1.65 \times 10^9$. ¿Cuánto vale $x(2000)$?

Solució: La ecuación es $x' = kx$ y su solución general es $x(t) = x_0\mathrm{e}^{kt}$, siendo x_0 la población inicial. La predicción es $x(2000) = 2.78\times 10^9$, aunque la población mundial en 2000 fue $\approx 6\times 10^9$.

10.12. (*) (Principio de Arquímedes & Eliminación de parámetros físicos) Una caja de altura h_{cj} y densidad d flota en aguas tranquilas con pequeñas oscilaciones. Sea $h(t)$ la altura sumergida en el instante t y h_{eq} la altura sumergida en la *posición de equilibrio*. Cacular h_{eq}. Determinar, despreciando los términos de fricción, la ecuación diferencial que cumple $h(t)$. Ídem para la función $x(t) = h(t) - h_{\mathrm{eq}}$. Ídem para la función $y(s) = x(t)$ con $s = \omega t$ y $\omega^2 = g/h_{\mathrm{eq}}$, donde g denota la aceleración de la gravedad.

En `http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=266.0` se puede visualizar el movimiento oscilatorio de la caja mediante un applet de JAVA.

Solució: $h_{\mathrm{eq}} = h_{\mathrm{cj}}d$. Las ecuaciones son $h'' + gh/h_{\mathrm{eq}} = g$, $x'' + \omega^2 x = 0$ y $y'' + y = 0$.

10.13. (*) (Muelle vertical con fricción) Colgamos una masa m de un muelle vertical cuya *constante de Hooke* es λ. El medio ofrece una resistencia igual a μ veces la velocidad instantánea. Sean $x_{\mathrm{c}}(t)$ y $x_{\mathrm{s}}(t)$ las desviaciones de la masa desde las posiciones de equilibrio del muelle con y sin masa, respectivamente. Relacionarlas y plantear la ecuación que cumple cada una.

Solució: La relación es $x_{\mathrm{s}}(t) = x_{\mathrm{c}}(t) + mg/\lambda$. Las EDOs son $mx_{\mathrm{c}}'' + \mu x_{\mathrm{c}}' + \lambda x_{\mathrm{c}} = 0$ y $mx_{\mathrm{s}}'' + \mu x_{\mathrm{s}}' + \lambda x_{\mathrm{s}} = mg$.

10.14. (**) (Muelle vertical con fricción) Volvemos al problema anterior del muelle vertical, tomando $m = 1/2$ kilogramos, $\lambda = 3/2$ Newtons por metro y $\mu = 2$ Newtons por metro por segundo. Recordamos que la ecuación diferencial que modela la dinámica es

$$mx'' + \mu x' + \lambda x = 0$$

siendo $x(t)$ el desplazamiento desde la posición de equilibrio con masa en el instante t.

(a) ¿Qué tipo de oscilación es?

(b) Resolver el PVI correspondiente a impulsar la masa desde la posición de equilibrio con velocidad inicial v_0.

(c) Calcular la aceleración inicial de la masa. Calcular el instante $t_* > 0$ en el cual la masa alcanza su desplazamiento máximo. Calcular el valor del desplazamiento, de la velocidad y de la aceleración de la masa en el instante t_*. Expresar los resultados de forma exacta.

Solució:

(a) Tenemos la oscilación amortiguada libre $x'' + 2kx' + \omega_0^2 x = 0$ con $k = \mu/2m = 2$ y $\omega_0^2 = \lambda/m = 3$. Por tanto, estamos en el caso sobreamortiguado: $k > \omega$.

(b) Las c.i. son $x(0) = 0$ y $x'(0) = v_0$. La solución del PVI asociado es $x(t) = v_0\big(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t}\big)/2$.

(c) La aceleración inicial es igual a $x''(0) = -4x'(0) - 3x(0) = -4v_0$. La solución anterior vale cero inicialmente, tiende a cero cuando $t \to +\infty$ y tiene un único punto crítico en el instante $t = t_* = (\ln 3)/2$. El desplazamiento, la velocidad y la aceleración en ese instante valen $x(t_*) = v_0/3\sqrt{3}$, $x'(t_*) = 0$ y $x''(t_*) = -4x'(t_*) - 3x(t_*) = -v_0/\sqrt{3}$, respectivamente.

(10B) Sistemes lineals a coeficients constants.

10.21. Calcular la solución general de los sistemas lineales $X' = AX$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Solució: Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental cualquiera, entonces $X_{\mathrm{h}}(t) = \Phi(t)\vec{c}$ es la solución general.

(a) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$.

(b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2\cos 2t & 2\sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t & -(\sin 2t + \cos 2t) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}$.

(c) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}$.

(d) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 25\mathrm{e}^{t} & \cos 5t - 5\sin 5t & \sin 5t + 5\cos 5t \\ -7\mathrm{e}^{t} & \cos 5t & \sin 5t \\ 6\mathrm{e}^{t} & \cos 5t & \sin 5t \end{pmatrix}$.

10.22. Calcular la solución de $X' = AX$, $X(0) = X_0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿Tiene el sistema $X' = AX$ alguna solución $X(t)$ acotada para todo $t \in \mathbb{R}$?

Solució: La solución general del sistema es $X_{\mathrm{h}}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \mathrm{e}^{-2t} + c_2 \mathrm{e}^t \\ c_2 \mathrm{e}^t \\ c_3 \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$, con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ libres. Por tanto, la única solución del sistema acotada en toda la recta real es la función idénticamente nula. La solución del PVI se obtiene tomando $c_1 = c_3 = 1$ y $c_2 = 2$; es decir, $X(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^t \\ 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$.

10.23. (Matlab)

(a) Usar el comando `dsolve` de MATLAB para resolver <u>simbólicamente</u>

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 - x_2 \\ x_2' &= x_1 + 3x_2 \\ x_1(0) &= 1 \\ x_2(0) &= 0 \end{cases}.$$

(b) Usar el comando `dsolve` de MATLAB para calcular <u>simbólicamente</u> la solución general del sistema $X' = AX$, donde A es la matriz 4×4 del siguiente apartado.

(c) Usar el comando `expm` de MATLAB (no confundir con `exp`) para calcular <u>numéricamente</u> el valor en el instante $t_{\mathrm{f}} = 2$ de la solución de$X' = AX$, $X(t_0) = X_0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad t_0 = 1.$$

Esta matriz tiene dos VAPs complejos conjugados dobles y, además, no diagonaliza.

Solució:

(a) *Para obtener la solución* $X(t) = \begin{pmatrix} 1 - t \\ t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}$, *podemos usar el código*

```
>> eq1='Dx1=x1-x2'; eq2='Dx2=x1+3*x2'; ci1='x1(0)=1'; ci2='x2(0)=0';
>> sol=dsolve(eq1,eq2,ci1,ci2);
>> [sol.x1;sol.x2]
ans =
 exp(2*t)*(1-t)
     exp(2*t)*t
```

(b)
```
>> sistema='Dx1=x1-x2+x3,Dx2=x1+x2+x4,Dx3=x3-x4,Dx4=x3+x4';
>> sol=dsolve(sistema);
>> [sol.x1;sol.x2;sol.x3;sol.x4]
ans =
  exp(t)*(sin(t)*C2+cos(t)*C1+C3*cos(t)+sin(t)*C3*t+cos(t)*C4*t)
 -exp(t)*(cos(t)*C2-sin(t)*C1-C3*sin(t)+cos(t)*C3*t-sin(t)*C4*t)
                                    exp(t)*(C3*sin(t)+cos(t)*C4)
                                   -exp(t)*(C3*cos(t)-C4*sin(t))
```

(c) *La solución del PVI es* $X(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}X_0$. *Implementamos esta fórmula con el código:*

```
>> A=[1 -1 1 0;1 1 0 1;0 0 1 -1;0 0 1 1]; X0=[1;2;3;4]; t0=1; tf=2;
>> Xf=expm((tf-t0)*A)*X0
Xf =
   -7.8494
   17.9616
   -4.7433
   12.7368
```

10.24. (*) (Péndulo de Wilberforce) Una masa colgando de un muelle flexible en forma de espiral puede oscilar en modo longitudinal (arriba y abajo) o torsional (girando), existiendo un pequeño acoplamiento entre estos dos tipos de movimiento. En Youtube se pueden ver péndulos así.

Sean $y(t)$ y $\theta(t)$ los desplazamientos desde la posición de equilibrio en estos dos modos. Es decir, $y(t)$ mide las oscilaciones verticales mientras que $\theta(t)$ mide las torsionales. Sea m la masa y I su momento de inercia. Sean ω^2 y ν^2 las constantes longitudinal y torsional de Hooke del muelle. Supondremos que el acoplamiento entre los dos tipos de movimiento consiste en que la "influencia" que cada uno de ellos ejerce sobre el otro es proporcional a su propio desplazamiento, con una constante de proporcionalidad común. Plantear, despreciando las fuerzas de fricción, las dos ecuaciones de segundo orden del movimiento, para después transformarlas en un sistema lineal formado por cuatro ecuaciones de primer orden.

Solució: Las ecuaciones del movimiento son

$$\left\{\begin{array}{rcl} my'' + \omega^2 y & = & \epsilon\theta \\ I\theta'' + \nu^2\theta & = & \epsilon y \end{array}\right.$$

donde ϵ es la pequeña constante de proporcionalidad común. Introduciendo las nuevas funciones incógnita $z = y'$ y $\Omega = \theta'$, transformamos ese par de ecuaciones en el sistema lineal de primer orden

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & z \\ z' & = & -\omega^2 y/m + \epsilon\theta/m \\ \theta' & = & \Omega \\ \Omega' & = & -\nu^2\theta/I + \epsilon y/I \end{array}\right. .$$

10.25. (**) (Pulsación en el péndulo de Wilberforce) Una masa colgando de un muelle flexible en forma de espiral puede oscilar en modo vertical (y) o torsional (θ). Despreciando las fuerzas de fricción, las ecuaciones del movimiento son

$$\left\{ \begin{array}{rcl} my'' + {\omega_0}^2 y & = & \epsilon\theta \\ I\theta'' + {\nu_0}^2\theta & = & \epsilon y \end{array} \right.$$

donde m, I, ω_0 y ν_0 son parámetros positivos del sistema, mientras que ϵ es una cantidad pequeña. Para simplificar, supondremos que $m = I = 1$, $\nu_0 = \omega_0$ y $|\epsilon| < {\omega_0}^2$.

Estudiar la estabilidad entorno al origen. Después, probar que existen unas frecuencias ω_+ y ω_- tales que las funciones

$$y(t) = \cos(\omega_+ t)\cos(\omega_- t), \qquad \theta(t) = \sin(\omega_+ t)\sin(\omega_- t)$$

son la solución del PVI formado por las ecuaciones del péndulo y las condiciones iniciales:

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = \theta(0) = \theta'(0) = 0.$$

Probar que $\lim_{\epsilon\to 0}\omega_+ = \omega_0$ y $\lim_{\epsilon\to 0}\omega_- = 0$. Interpretar físicamente el resultado como una transferencia “pulsante” de energía entre los dos modos de movimiento.

(No es fácil, ver `http://people.cs.uchicago.edu/ lebovitz/Eodesbook/lc.pdf`)

10.26. (Grandes Lagos) Queremos estudiar la evolución en la concentración de un contaminante en los lagos Eire y Ontario, conectados por un rio que fluye del primero al segundo. Sean V_{E} y V_{O} los volúmenes respectivos, en millas cúbicas. Sean r_{E} y r_{O} los respectivos caudales de salida, en millas cúbicas por año. Se cumple que $r_{\mathrm{O}} > r_{\mathrm{E}}$, pues el lago Ontario recibe todo los que sale del lago Eire y algo más. Sean e_{E} y e_{O} las concentraciones de contaminantes que entran a cada lago desde el exterior, en kilogramos por milla cúbica. Sean $c_{\mathrm{E}}(t)$ y $c_{\mathrm{O}}(t)$ las concentraciones de contaminantes que hay en cada lago en el instante t.

Escribir el sistema de ecuaciones diferenciales que cumplen las funciones $c_{\mathrm{E}}(t)$ y $c_{\mathrm{O}}(t)$. ¿Es un sistema lineal? Usando la intuición, y sin resolver el sistema, ¿a qué tenderán estas concentraciones cuando $t \to +\infty$? ¿Cómo se pueden interpretar los cocientes $p_{\mathrm{E}} = r_{\mathrm{E}}/V_{\mathrm{E}}$ y $p_{\mathrm{O}} = r_{\mathrm{O}}/V_{\mathrm{O}}$? Finalmente, calcular la solución general al fijar los valores (Google):

$$V_{\mathrm{E}} = 116, \qquad V_{\mathrm{O}} = 393, \qquad r_{\mathrm{E}} = 85, \qquad r_{\mathrm{O}} = 99.$$

(En realidad, los Grandes Lagos son cinco: Superior, Michigan, Hurón, Eire y Ontario. El modelo completo se encuentra en el libro “An Introduction to Mathematical Modeling” de E.A. Bender o en el PDF `http://www.ma1.upc.edu/ edis/lakes.pdf` de S. McKelvey.)

Solució: La cantidad de contaminante que entra en el lago Eire es $r_{\mathrm{E}}e_{\mathrm{E}}$ y la que sale es $r_{\mathrm{E}}c_{\mathrm{E}}(t)$. La cantidad de contaminante que entra por unidad de tiempo en el lago Ontario es $r_{\mathrm{E}}c_{\mathrm{E}}(t)+(r_{\mathrm{O}}-r_{\mathrm{E}})e_{\mathrm{O}}$ y la que sale es $r_{\mathrm{O}}c_{\mathrm{O}}(t)$. Por tanto, obtenemos el sistema lineal a coeficientes constantes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c'_{\mathrm{E}} & = & r_{\mathrm{E}}(e_{\mathrm{E}} - c_{\mathrm{E}})/V_{\mathrm{E}} \\ c'_{\mathrm{O}} & = & \big((r_{\mathrm{O}} - r_{\mathrm{E}})e_{\mathrm{O}} + r_{\mathrm{E}}c_{\mathrm{E}} - r_{\mathrm{O}}c_{\mathrm{O}}\big)/V_{\mathrm{O}} \end{array} \right. .$$

La concentraciones tenderán a igualarse con las respectivas concentraciones de entrada. Es decir, tenderán a e_{E} en el lago Eire y a $(r_{\mathrm{E}}e_{\mathrm{E}} + (r_{\mathrm{O}} - r_{\mathrm{E}})e_{\mathrm{O}})/r_{\mathrm{O}}$ en el lago Ontario. Los cocientes

p_{E} y p_{O} podrían interpretarse como la proporción de agua que se renova en un año en cada lago, aunque no es exactamente así. Finalmente, la solución general obtenida con los valores "googleados" es

$$c_{\mathrm{E}}(t) = c_1 \mathrm{e}^{-p_{\mathrm{E}} t} + e_{\mathrm{E}}, \qquad c_{\mathrm{O}}(t) = c_1 \alpha \mathrm{e}^{-p_{\mathrm{E}} t} + c_2 \mathrm{e}^{-p_{\mathrm{O}} t} + (85 e_{\mathrm{E}} + 14 e_{\mathrm{O}})/99.$$

donde $p_{\mathrm{E}} = 85/116 \approx 0.73$, $p_{\mathrm{O}} = 33/131 \approx 0.25$ y $\alpha = \frac{r_{\mathrm{E}} p_{\mathrm{O}}}{r_{\mathrm{O}}(p_{\mathrm{O}} - p_{\mathrm{E}})} = -9860/21921 \approx -0.45$. Observamos que contra mayores son p_{E} y p_{O}, más rápido se estabilizan las concentraciones de contaminantes. ¿Es lógico?